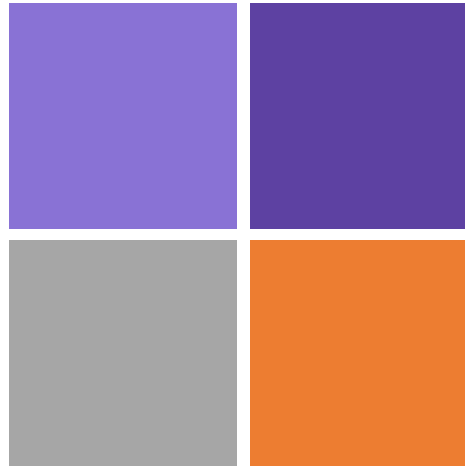


Semaine 3  
3D à 2D  
Déformation  
Effets thermiques  
Densité d'énergie



**Partie I: Contraintes et déformation relatives en 2D**

1. Contraintes dans le plan
2. Déformations relatives dans le plan
3. Résumé

**Partie III: Effets thermiques**

1. Effets thermiques
2. Structures hyperstatiques

**Partie II: Déformation**

1. De 3D à 1D
2. Déformation axiale
3. Barres comme des ressorts

**Partie IV: Densité d'énergie**

1. Énergie de déformation relative
2. Résumé

# Programme du cours

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
Danick Briand				
1	09.09	1. Intro des <b>3 enseignants</b> 2. Rappel bases statique et diagramme des forces	x	
1	11.09	Contraintes 1D	x	Série 1
2	16.09	Contraintes	x	Série 1
2	18.09	Contraintes	x	Série 2
3	23.09	Déformation	x	Série 2
3	25.09	Déformation	x	Série 3
4	30.09	Transformation	x	Série 3
4	02.10	Transformation	x	Série 4
5	07.10	Torsion	x	Série 4
5	09.10	Torsion	x	Série 5
Dimitrios Karampinos				

# Questions ?

## Quiz Session: micro200

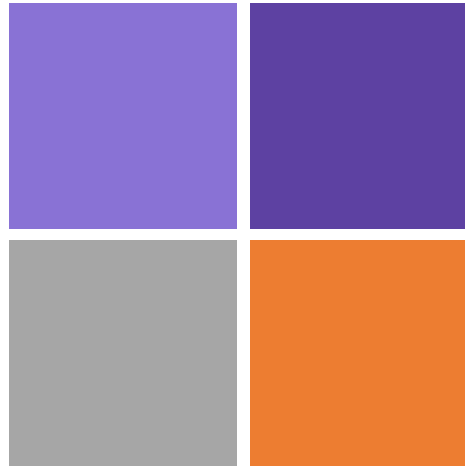


- Durant les séances d'exercices en classe
- Par courriel: [danick.briand@epfl.ch](mailto:danick.briand@epfl.ch)

# Semaine 3

## Partie I:

### Contraintes et Déformations relatives en 2D



1. Contraintes dans le plan
2. Déformations relatives dans le plan
3. Formuler des problèmes en 2D
4. Exemples
5. Résumé

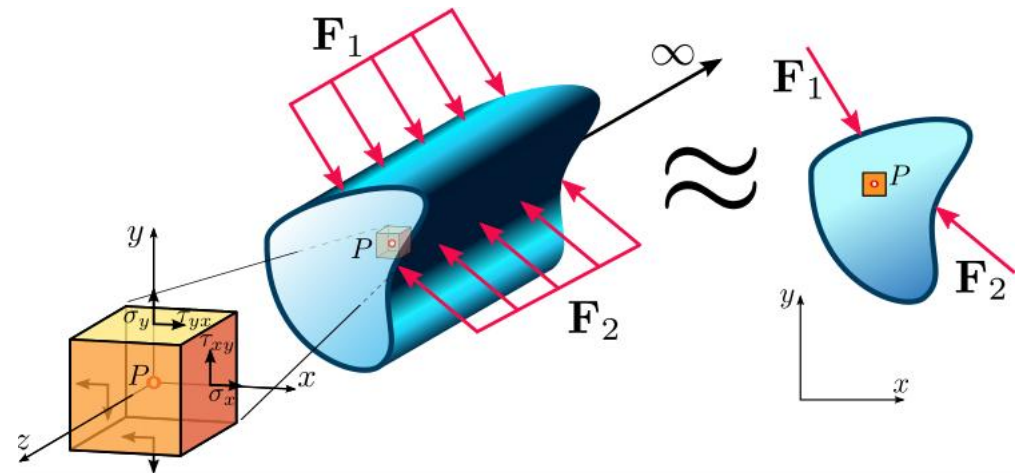
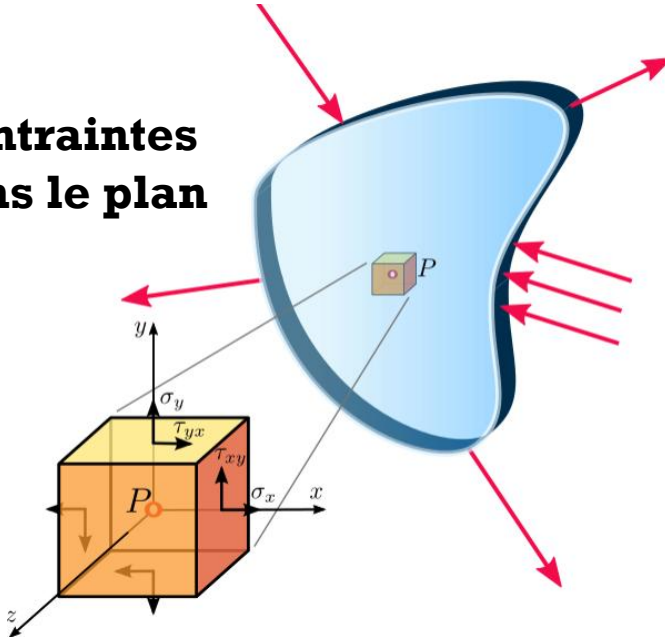
## ■ Contraintes et Déformation relatives en 2D

- Comprendre ce que sont les **contraintes et déformations relatives dans le plan**, en 2D
- Simplification de la **loi de Hooke généralisée en 2D**

# Réduire les problèmes 3D en problèmes 2D

- Dans plusieurs cas, **selon la géométrie et les conditions aux frontières de l'objet**, par exemple déplacement restreint dans une direction, le problème 3D peut être réduit en un problème 2D

## Contraintes dans le plan



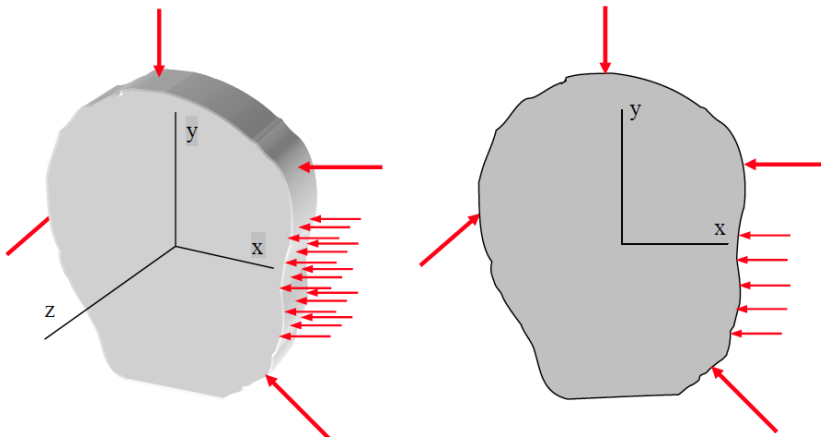
## Déformations relatives dans le plan

- Applicable si dans l'une des directions majeures, nous pouvons **couper des sections au travers de l'objet** et la **même distribution de contraintes ou déformations relatives pour chaque section**

# Etat de contraintes dans le plan 2D

- Si une structure est **mince**:  $dz \ll dx$  &  $dy$  : Contraintes dans le plan
- Cela simplifie le problème 3D car:  $\sigma_{zz} \approx \tau_{xz} \approx \tau_{yz} \approx 0$
- Seulement 3 composantes de contraintes restantes dans la matrice

Contraintes dans le plan:  
Plaques / Membranes minces



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En pratique, le critère s'applique pour des structures ayant **une épaisseur au moins 10 fois plus petite que la largeur de leur section.**

# Etat de contraintes dans le plan 2D

## IMPORTANT

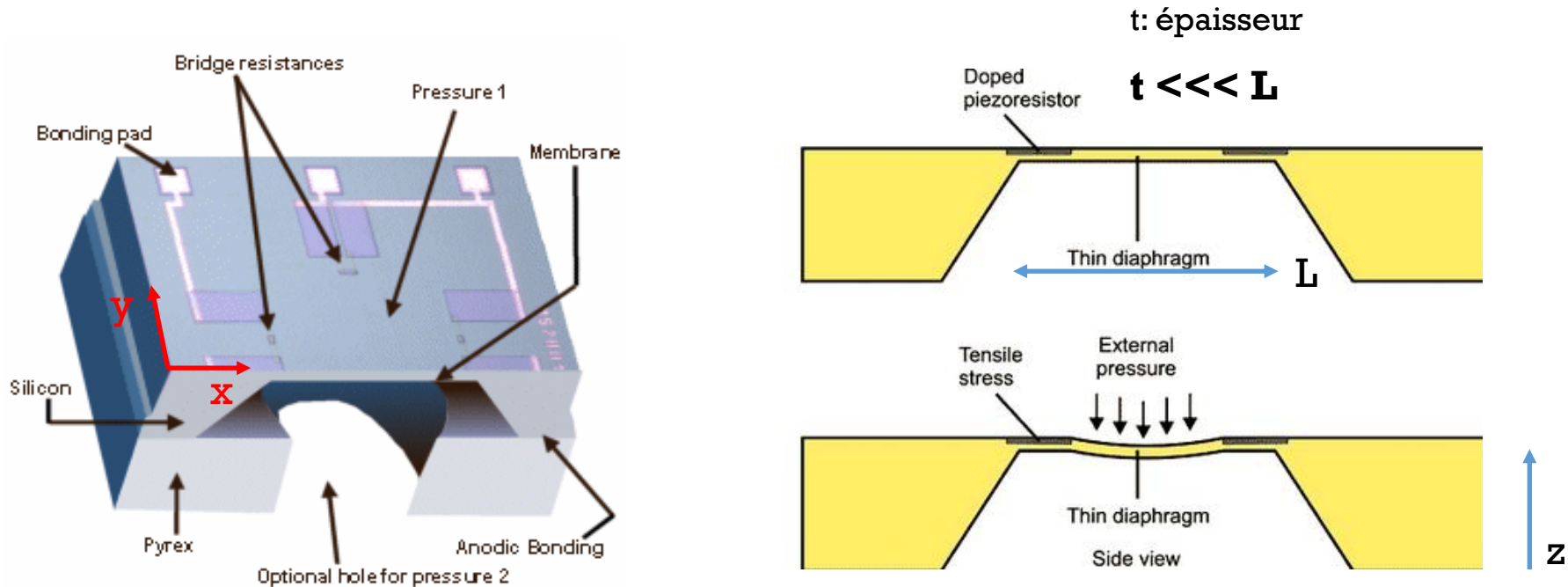
---

### **Etat de contraintes en 2D (x,y avec $\sigma_z = 0$ )**

- **Ne signifie PAS qu'il n'y a aucune force agissant dans le direction z.** En fait, des charges dans la direction z génèrent souvent de grandes contraintes dans la membrane (dans le plan x,y).
- **Ne signifie PAS que  $w=0$  (pas de déformation dans la direction z).** En fait, la deformation selon l'axe des z est souvent plus large pour les structures à parois minces.
  - Les artères, où il y a des déformations substantielles, peuvent être considérées comme un système avec un état de contraintes en 2D (en coordonnées polaires)
  - Fabrication de MEMS : contraintes résiduelles dans des membranes minces de SiN/SiO peuvent induire leur large déformation

# Etat de contraintes dans le plan 2D

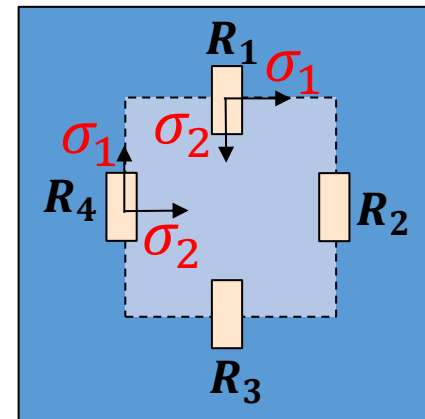
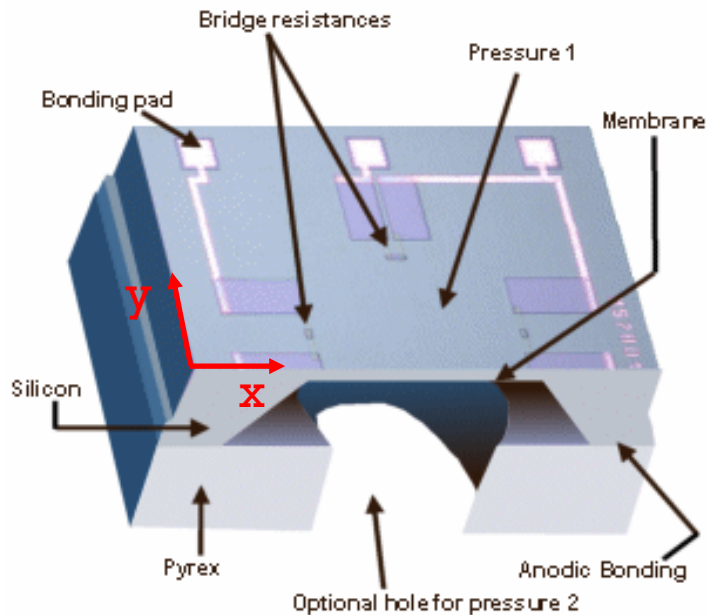
## Exemple du capteur de pression MEMS



- Contrainte en  $z$  négligeable par rapport aux contraintes dans le plan en  $x, y$ , mais la pression appliquée occasionne une déformation en  $z$  de la membrane, avec donc  $\varepsilon_{zz} \neq 0$

# Etat de contraintes dans le plan 2D

## Exemple du capteur de pression



- Mais les contraintes sont localisées dans le plan  $x,y$ ,  $\sigma_{zz}$  est **négligeable**
- Les jauges de contraintes piezorésistives sont placées aux extrémités de la membrane où la contrainte est maximale dans le plan  $x,y$

# Etat de contraintes dans le plan 2D

## Les équations simplifiées

- Pour un état de contraintes dans le plan selon la direction-z ( $\sigma_z=0$ ), les équations sont les suivantes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx})$$

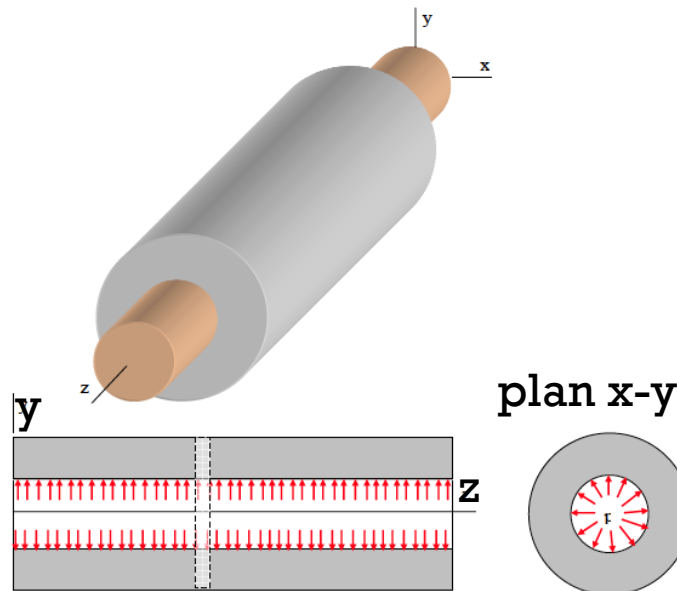
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \neq 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

## Représentation d'un corps long prismatique

Dimension selon la direction  $z$  est beaucoup, beaucoup plus grande que celles dans les directions  $x$  et  $y$ :  $L \gg x, y$

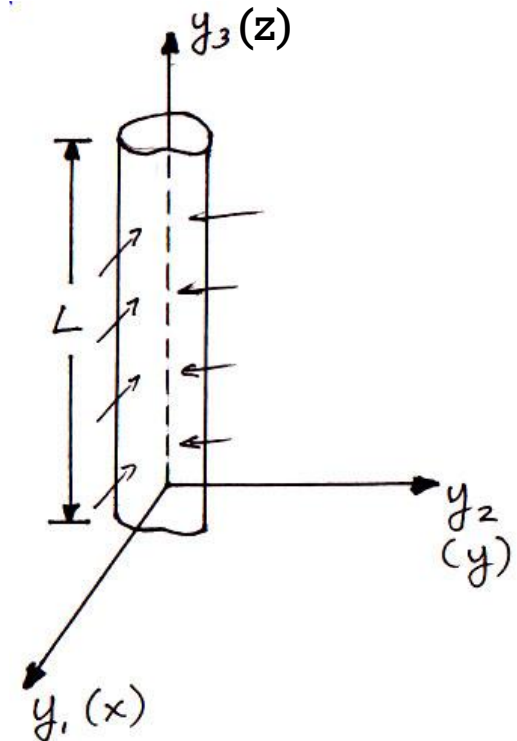
Déformations relatives dans le plan:  
Structures épaisses/longues avec symétrie



## Représentation d'un corps long prismatique

Dimension selon la direction  $z$  - est beaucoup, beaucoup plus grande que celles dans les directions  $x$  et  $y$ :  $L \gg x, y$

- Etant donné que le corps est considéré comme infiniment long selon  $z$ , les charges importantes sont dans le plan  $x$ - $y$  (rien en  $z$ ) et ne changent pas selon l'axe  $z$ :
- Ce qui implique qu'il n'y a pas de gradient de déplacement selon  $z$  (du moins négligeable)
- On considère  $u$  en  $z = w = 0$



- L'état de **déformations relatives dans le plan** survient quand il n'y a pas de déformation probable ou possible dans une des directions
- Cet état survient souvent dans **des objets qui sont très longs dans une direction ET avec une charge uniforme sur ses sections le long de cette direction:**

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$
$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overleftrightarrow{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- Exemples d'états de déformations relatives dans le plan:
  - Tuyau long contenant un gaz pressurisé et fixé à ses extrémités
  - Un barrage résistant à un lac artificiel
  - ...



# Déformations relatives dans le plan

## IMPORTANT

- **Même si la Déformation relative selon 'z' est nulle, cela ne signifie PAS que la contrainte en 'z' est zéro.**
- En fait la contrainte selon l'axe des z est:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

De la matrice de souplesse:  $\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$

# Contraintes et déformations relatives dans le plan

## Résumé

Dans le plan	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$
Contraintes	✓	✓	0	✓	✓	✓	✓	0	0
Déf relatives	✓	✓	✓	✓	✓	0	✓	0	0

# Résumé Partie I

## Contraintes et déformations relatives dans le plan

### Contraintes dans le plan

**mince:  $dz \ll dx$  &  $dy$**

$$\sigma_{zz} \approx \tau_{xz} \approx \tau_{yz} \approx 0$$

$$\sigma_x = \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_y = \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx})$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \neq 0$$

### Déformations dans le plan

**pas de déformation possible dans une direction (ici selon z)**

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

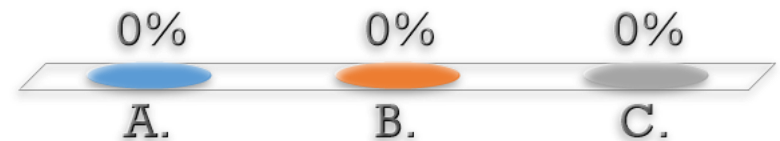
$$\overleftrightarrow{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

Dans le plan	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$
Contraintes	✓	✓	0	✓	✓	✓	✓	0	0
Déform. relatives	✓	✓	✓	✓	✓	0	✓	0	0

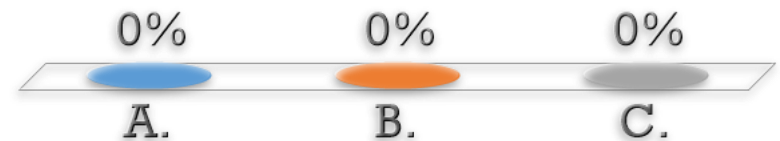
# Contraintes ou Déformations relatives dans le plan?

- A. Contraintes dans le plan
- B. Déformatives relatives dans le plan
- C. Aucune de ces réponses



# Contraintes ou Déformations relatives dans le plan?

- A. Contraintes dans le plan
- B. Déformatives relatives dans le plan
- C. Aucune de ces réponses



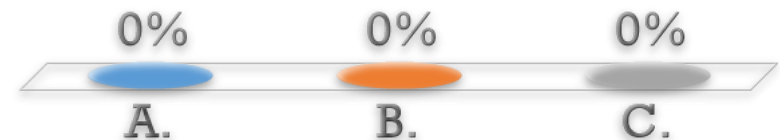
# Contraintes ou Déformations relatives dans le plan?

- A. Contraintes dans le plan
- B. Déformatives relatives dans le plan
- C. Aucune de ces réponses

Cylindrical vessel



Spherical vessel



# Exemple 3.1

## Matrice de souplesse

### Relations Contraintes à Déformations relatives

Matrice de souplesse

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\text{Vecteur Déformations relatives}} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\text{Vecteur Contraintes}}$$

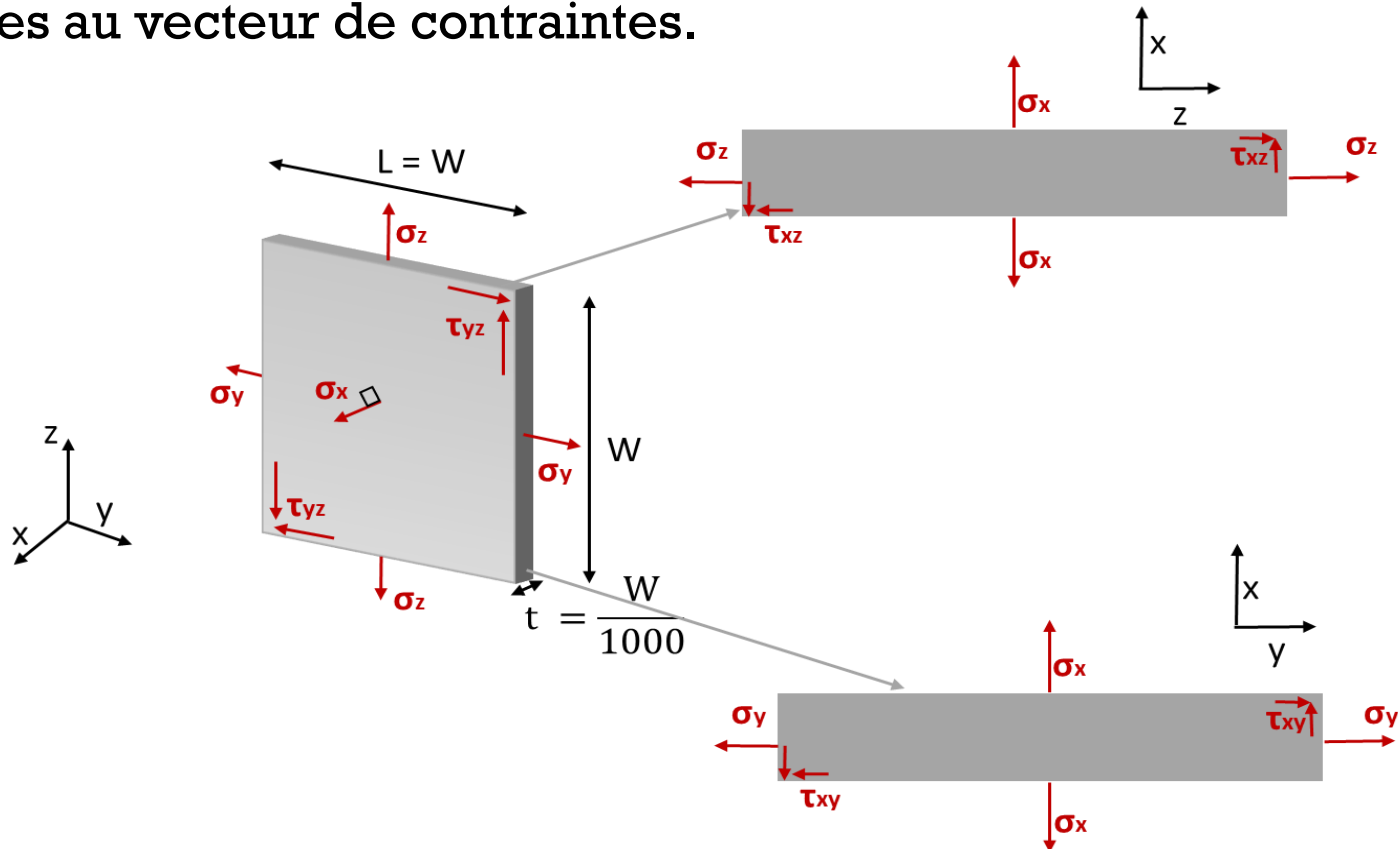
$$(2(1+\nu)) = E / G$$

# Exemple 3.1

## Matrice de souplesse

- Plaque mince avec les **composantes de la contrainte selon 'x' nulles** et coefficient de Poisson  $\nu \neq 0$

A partir de la matrice de souplesse, relier le vecteur de déformations relatives au vecteur de contraintes.



# Exemple 3.1

## Matrice de souplesse

### Relations Contraintes à Déformations relatives

Matrice de souplesse

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \cancel{\gamma_{xy}} \\ \cancel{\gamma_{xz}} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\text{Vecteur Déformations relatives}} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \cancel{\tau_{xy}} \\ \cancel{\tau_{xz}} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\text{Vecteur Contraintes}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(2(1+\nu)) = E / G$

# Exemple 3.1

## Matrice de souplesse

**Simplification pour une plaque mince avec contraintes nulles selon 'x'**

$$\begin{array}{l} \sigma_x = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} -\nu & -\nu & 0 \\ 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$(2(1+\nu)) = E / G$$

# Déformation relative dans un Cube

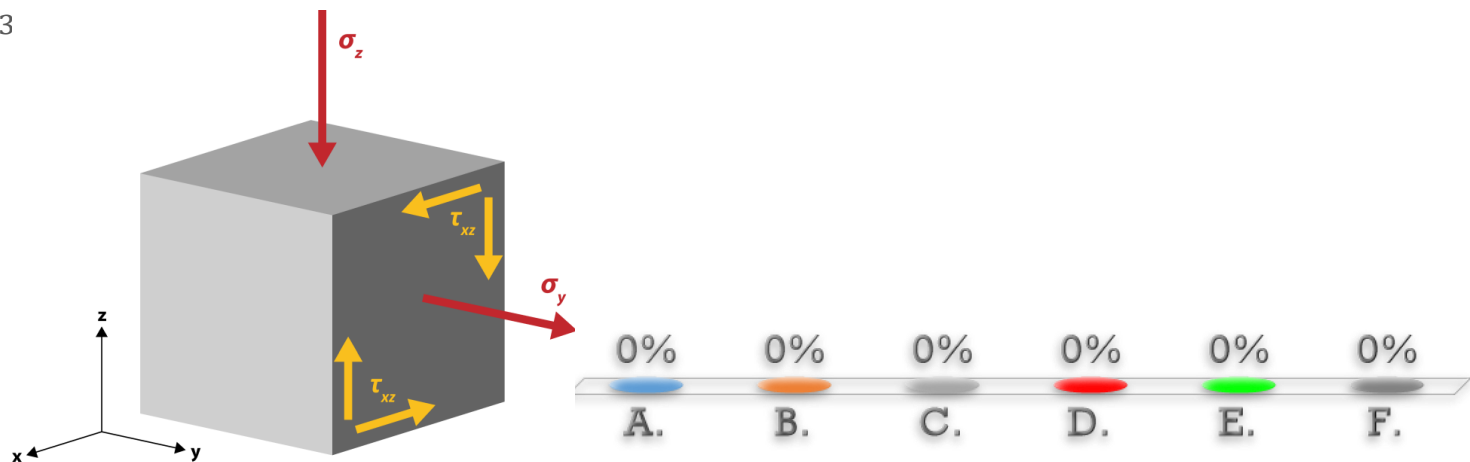
$\sigma_z$  compressif à 200 MPa,  $\sigma_y$  en tension à 300 MPa. Contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  de 50 MPa.

Les autres composantes de la matrice de contraintes sont nulles.

Poisson's ratio  $\nu = 0.25$ ,  $E = 5$  GPa,  $G = 2$  GPa.

**Quelle est la déformation relative  $\varepsilon_{xx}$  selon l'axe des x ?**

- A.  $10 \cdot 10^{-3}$
- B.  $-10 \cdot 10^{-3}$
- C.  $5 \cdot 10^{-3}$
- D.  $-5 \cdot 10^{-3}$
- E.  $15 \cdot 10^{-3}$
- F.  $-15 \cdot 10^{-3}$

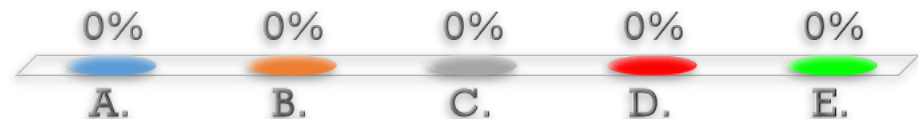
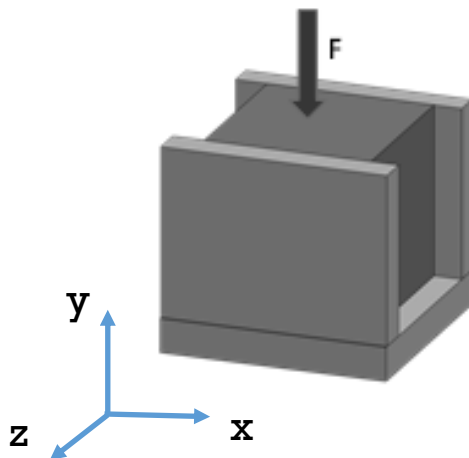


# Déformation relative dans un Cube

Nous considérons:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ , et  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . où  $\epsilon$  sont les déformations relatives normales et  $\sigma$  les composantes des contraintes normales.

**Avec Coefficient de Poisson  $\nu = 0.5$ , quels paramètres sont nuls (= 0) ?**

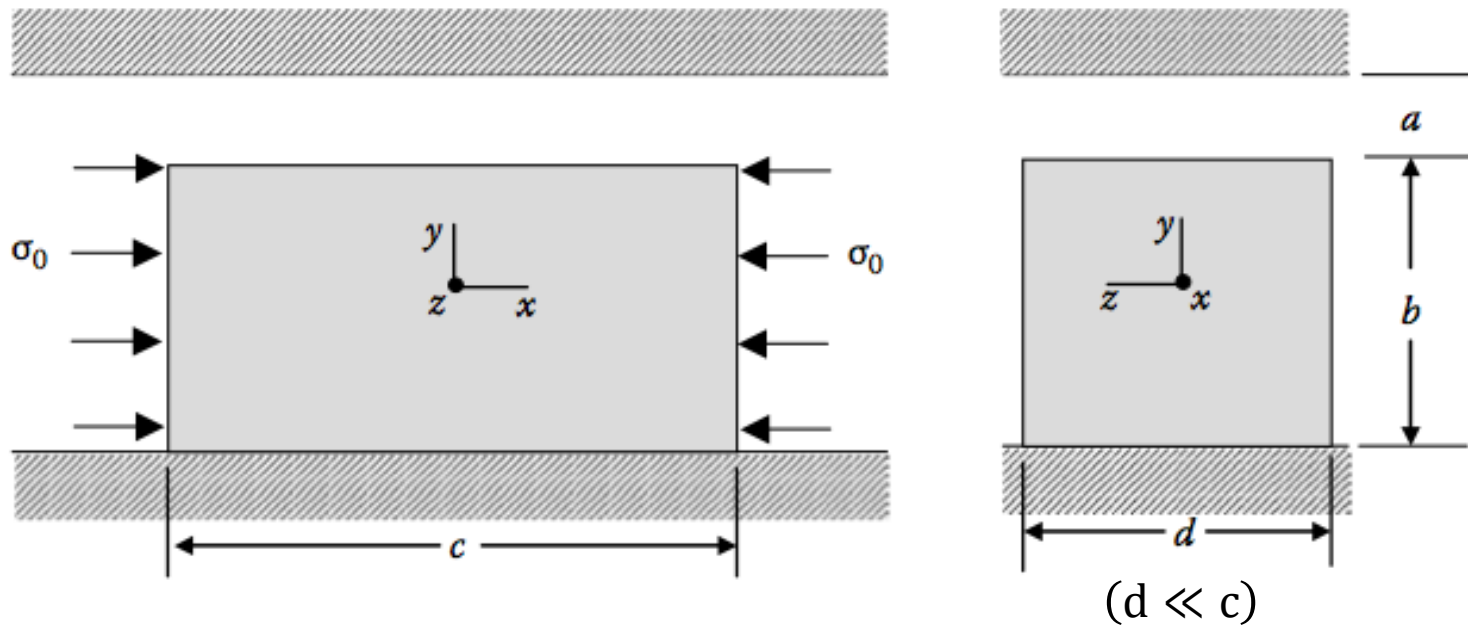
- A.  $\epsilon_x, \epsilon_z, \sigma_z$
- B.  $\epsilon_z, \sigma_x$
- C.  $\sigma_x, \sigma_y$
- D.  $\epsilon_z, \sigma_y$
- E.  $\epsilon_y, \epsilon_z$



# Exemple 3.2

## Bloc entre deux murs

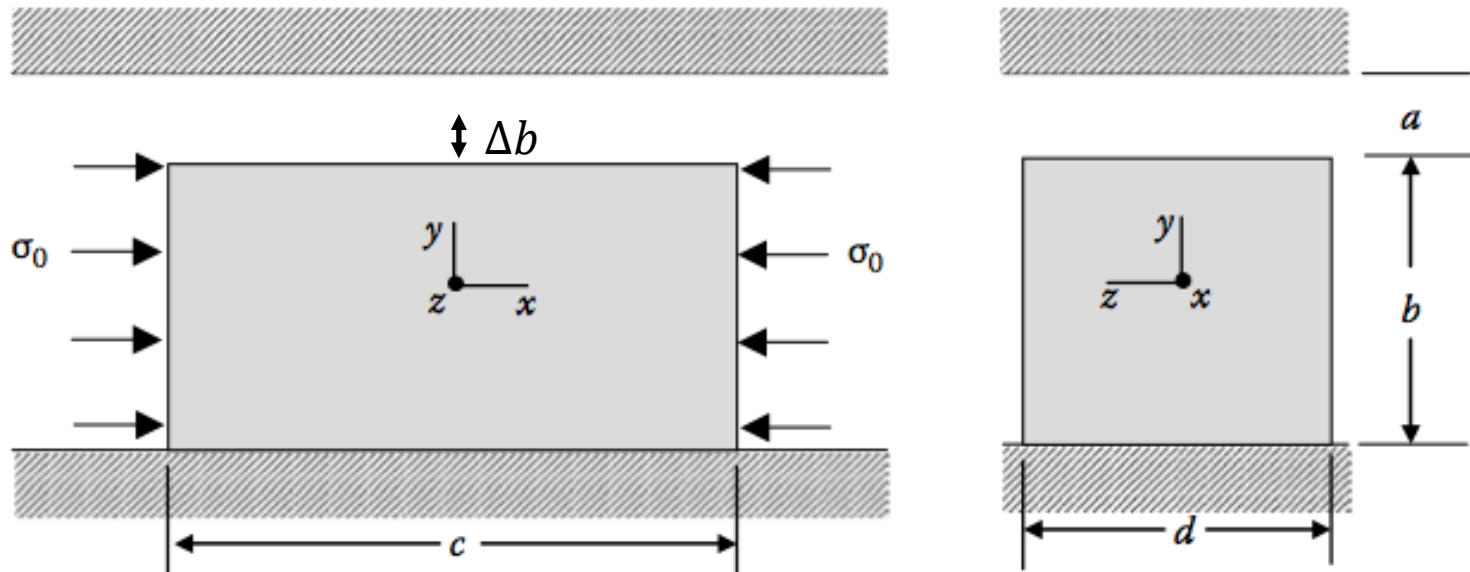
- Un bloc rectangulaire A est compris entre deux surfaces rigides avec un gap 'a'. Une contrainte uniforme  $\sigma_0$  est appliquée selon l'axe x.
- (a) Déterminer la contrainte  $\sigma_{yy}$  avant et juste avant la fermeture du gap
- (b) La valeur minimale de  $\sigma_0$  nécessaire pour fermer le gap avec  $\sigma_{zz}=0$
- (c) Le changement de longueur selon l'axe 'x' quand le gap 'a' est fermé



# Exemple 3.2

## Bloc entre deux murs

- Contrainte dans la direction  $x$  :  $\sigma_0$
- Génération d'une déformation en  $y$  due à l'effet Poisson
- Pour une valeur donnée  $\sigma_0$ , déformation en  $y$ :  $\Delta b = a$  (le gap entre le bloc et le mur)



# Exemple 3.2

## Bloc entre deux murs

- Pas de cisaillement, donc le problème n'a que 3 équations:

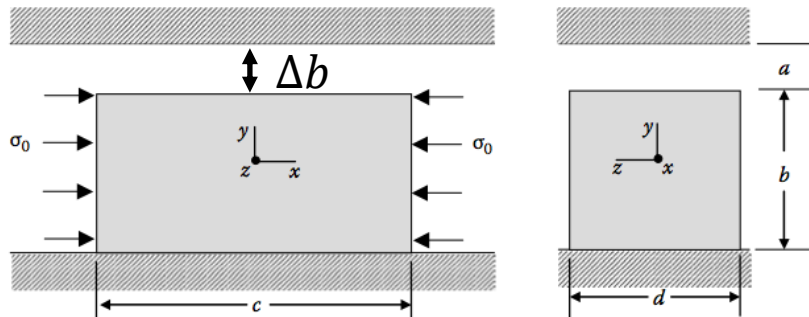
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z; \dots \quad \begin{matrix} \sigma_z = 0 \\ \sigma_x = -\sigma_0 \end{matrix}$$

- Comme  $\sigma_z = 0$  et  $\sigma_x = -\sigma_0$ :
 
$$\varepsilon_y = \frac{\nu}{E} \sigma_0 + \frac{\sigma_y}{E} \rightarrow \sigma_y = E \varepsilon_y - \nu \sigma_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b}$$

- Quand le gap est ouvert ( $\Delta b < a$ ):

$$\sigma_y = 0$$



$$\& \quad \Delta b = \varepsilon_y b = \frac{\nu}{E} \sigma_0 b$$

# Exemple 3.2

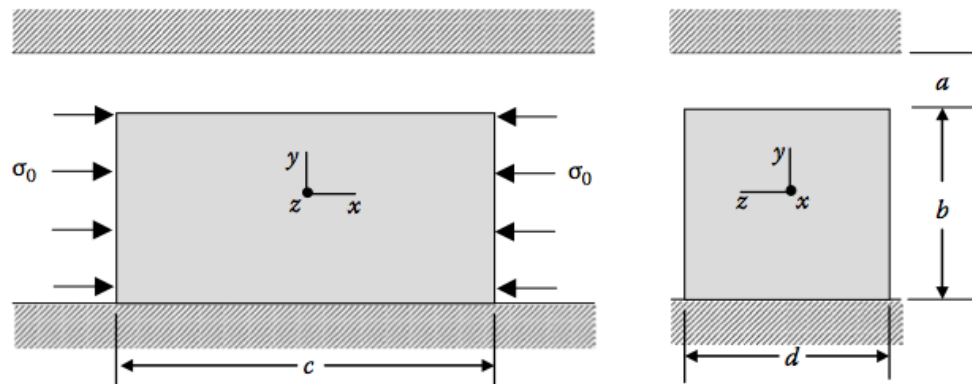
## Bloc entre deux murs

- Au moment juste où le gap se ferme, mais sans s'appuyer au mur:

$$\Delta b = a, \quad \varepsilon_y = \frac{a}{b} \quad \& \quad \sigma_y = 0$$

$$\text{De } \sigma_y = E \frac{a}{b} - \nu \sigma_0 \quad \nu \sigma_0 = \frac{a}{b} E \rightarrow \sigma_0 = \frac{E a}{\nu b}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_0}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y = -\frac{1}{E} \left( \frac{E a}{\nu b} \right) = -\frac{1 a}{\nu b} \rightarrow \Delta c = \varepsilon_x \cdot c = -\frac{1 a \cdot c}{\nu b}$$



# Exemple 3.2

## Bloc entre deux murs

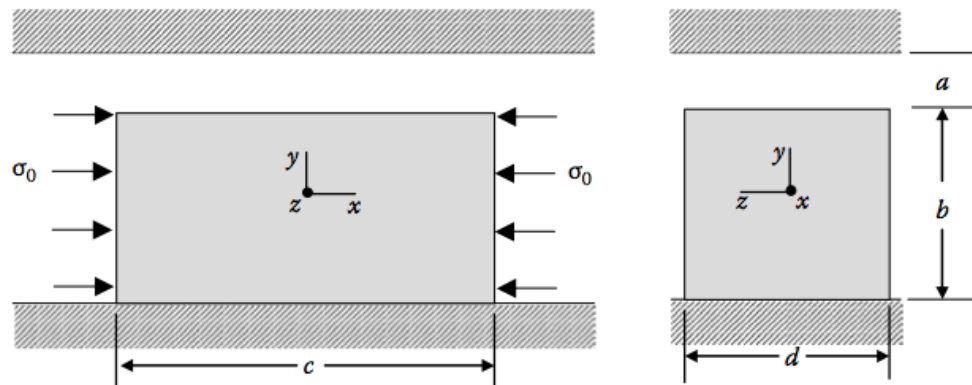
- Maintenant le bloc touche et pousse sur le mur en y (apparition d'une réaction)

Calculer la contrainte  $\sigma_y$  dans le matériau en fonction de  $\sigma_0$ .

Sans mur cela signifie que nous avons  $\varepsilon_{y, total} > \frac{a}{b}$

Avec mur  $\varepsilon_{y, tot} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{a}{b}$   $\varepsilon_{y, tot} = \frac{a}{b} = \varepsilon_{y, \sigma_x} + \varepsilon_{y, reaction}$

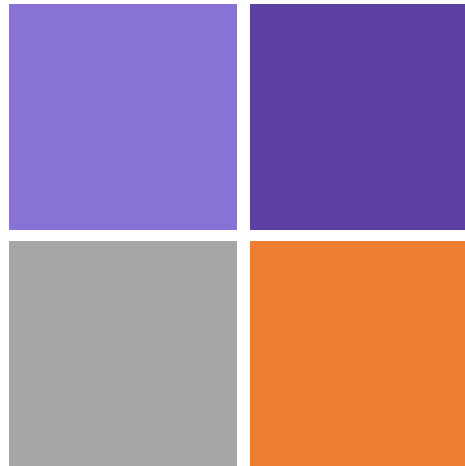
$$\varepsilon_{y, tot} = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{\sigma_y}{E} \quad \rightarrow \sigma_y = E \varepsilon_{y, tot} - \nu \sigma_0 \quad \rightarrow \sigma_y = E \frac{a}{b} - \nu \sigma_0$$



# Semaine 3

## Partie II:

### Déformation

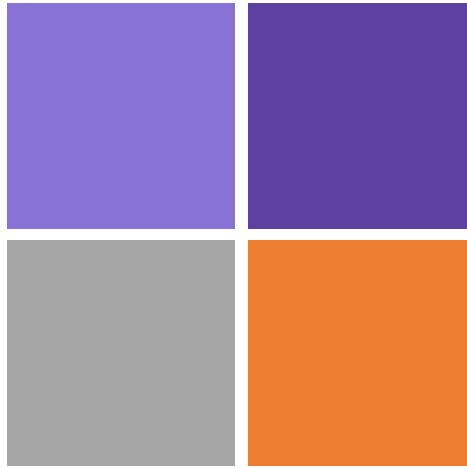


1. Déformation en 3D et en 2D
2. Equilibre en 3D, 2D et 1D
3. Déformation axiale
4. Barre comme un ressort

**Relier**  
**Contrainte & et Déformation relative**  
**à la Déformation**

- Calculer des déformations à partir de contraintes et déformations relatives
- Equilibre et déformation axiale en 3D, 2D & 1D
- Analogie barres - ressorts

# Déformation en 3D et 2D



## Relations Contraintes à Déformations relatives

Matrice de souplesse

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{Déformations relatives}}} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{Contraintes}}}$$

$$(2(1+\nu)) = E / G$$

- La déformation relative volumétrique / le changement de volume peuvent être calculés:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ &= \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ &= \frac{1}{K} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\end{aligned}$$

$$K = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

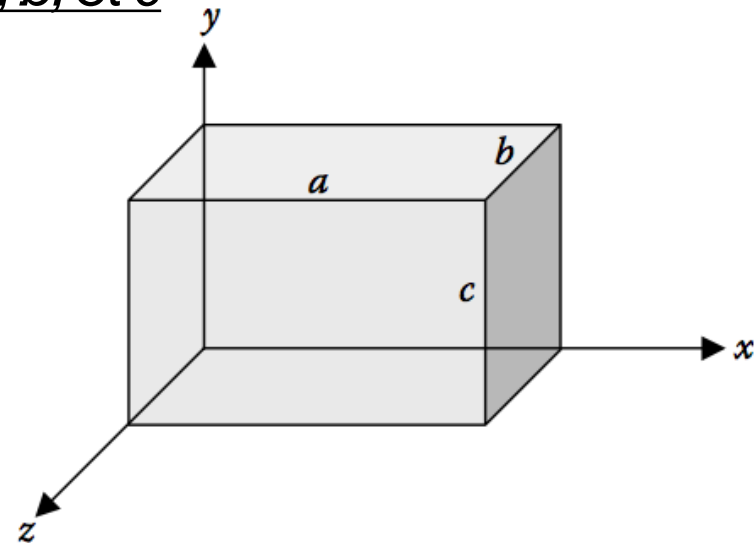
$K$  est le module en volume du matériau. Il peut être calculé à partir des 2 composantes indépendantes  $E$  and  $\nu$ .

# Exemple Déformation 3D

## Charge sur les 3 axes

- Un bloc rectangulaire de cuivre a les dimensions suivantes:  
 $a = 200 \text{ mm}$ ,  $b = 120 \text{ mm}$ , and  $c = 100 \text{ mm}$ .
- Ce bloc est soumis à une charge triaxiale en équilibre comme suit:  
 $\sigma_x = +2.40 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = -1.20 \text{ MPa}$ , and  $\sigma_z = -2.0 \text{ MPa}$ .
- En assumant que les forces appliquées sont distribuées uniformément sur les faces respectives, déterminer:  
- les changements de dimensions selon  $a$ ,  $b$ , et  $c$

$E = 140 \text{ GPa}$  and  $\nu = 0.35$ .



# Exemple Déformation 3D

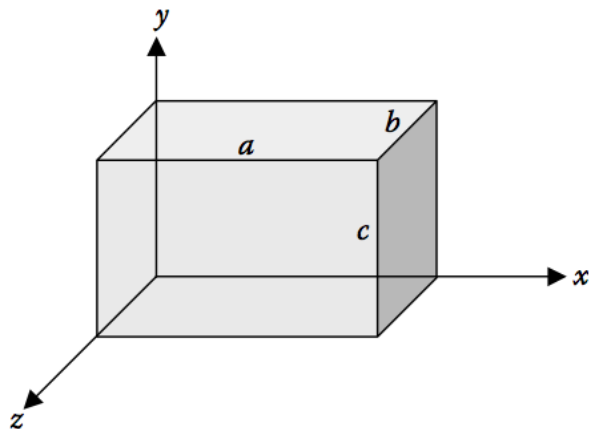
## Charge sur les 3 axes

- Application de la loi de Hooke généralisée en utilisant la *matrice de Souplesse*.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

- Pas de contraintes en cisaillement, le problème peut se réduire à:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z; \dots$$



$$\varepsilon_x = \frac{2.40 \text{ MPa}}{140 \text{ GPa}} - \frac{0.35}{140 \text{ GPa}} (-1.20 \text{ MPa}) - \frac{0.35}{140 \text{ GPa}} (-2.0 \text{ MPa})$$

$$\varepsilon_x = 25.14285714 \cdot 10^{-6}$$

# Exemple Déformation 3D

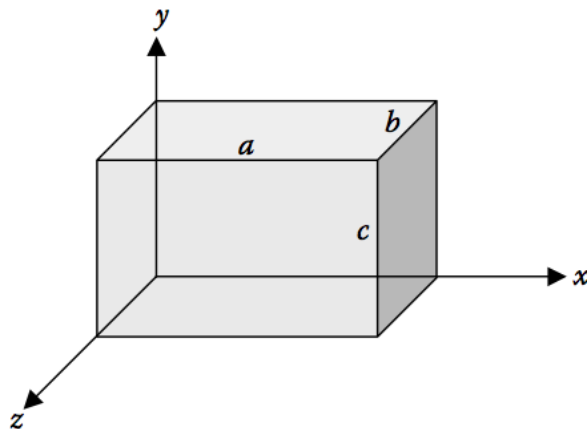
## Charge sur les 3 axes

- We start from the Generalized Hooke's Law, using *Compliance Matrix*.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

- Because no shear load is applied the problem is reduced to:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z; \dots$$



$$\varepsilon_x = \frac{2.40 \text{ MPa}}{140 \text{ GPa}} - \frac{0.35}{140 \text{ GPa}} (-1.20 \text{ MPa}) - \frac{0.35}{140 \text{ GPa}} (-2.0 \text{ MPa})$$

$$\varepsilon_x = 25.14285714 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_x = 25 \cdot 10^{-6}$$

# Exemple Déformation 3D

## Charge sur les 3 axes

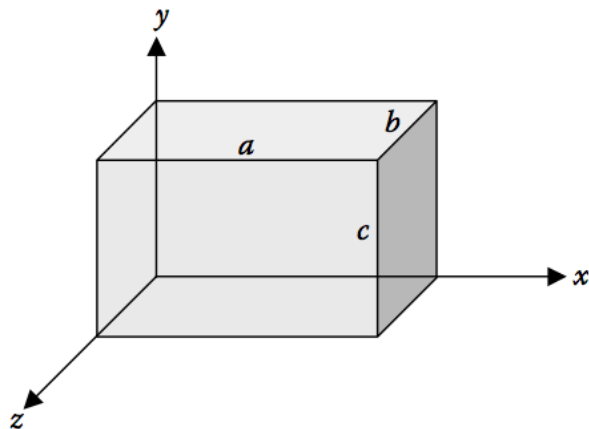
- En appliquant les mêmes types d'équations pour les autres directions.

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z \rightarrow \varepsilon_y = -9.57148 \cdot 10^{-6} = -9.6 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \rightarrow \varepsilon_z = -17.2857 \cdot 10^{-6} = -17 \cdot 10^{-6}$$

- En utilisant la définition de la déformation relative:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\Delta a}{a} \rightarrow \Delta a = a \cdot \varepsilon_x = -5.0 \mu\text{m} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \varepsilon_y = \frac{\Delta c}{c} \rightarrow \Delta c = c \cdot \varepsilon_y = -0.96 \mu\text{m} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \rightarrow \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b} \rightarrow \Delta b = b \cdot \varepsilon_z = -2.0 \mu\text{m} \end{aligned}$$



# Déformation en 2D

À partir des déformations relatives

## Contraintes dans le plan

**mince:  $dz \ll dx$  &  $dy$**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \neq 0$$

## Déformations dans le plan

**pas de déformation possible dans une direction**

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Example 3.3

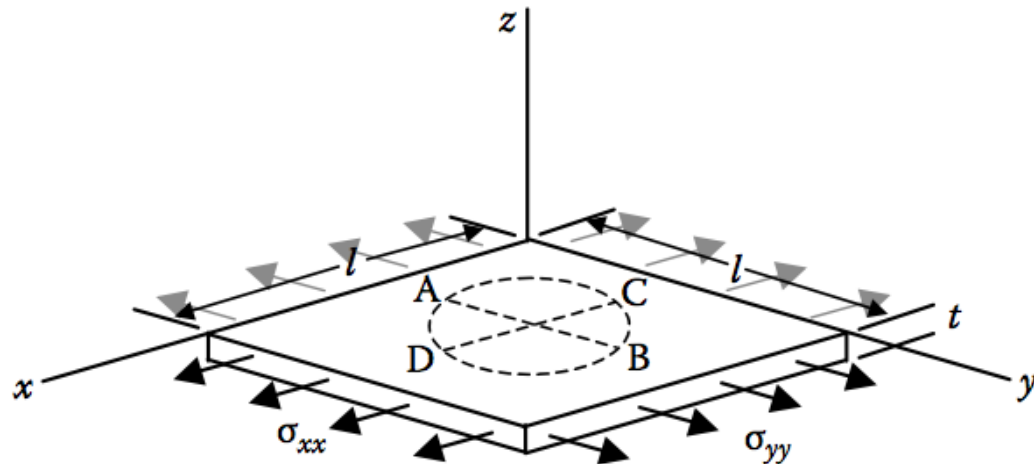
## Déformation avec contraintes dans le plan

- Un cercle de diameter 'd' est inscrit sur une plaque de métal carré (Module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ ) d'épaisseur  $t$  et de côté  $l$ .
- Si la plaque est soumise à des contraintes dans le plan  
 $\sigma_{xx} = 82.7$  MPa et  $\sigma_{yy} = 137.8$  MPa,

avec  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0.30$ ,  $t = 2.00$  cm, et  $l = 40.0$  cm

*Trouver les changements:*

- De la longueur du diamètre  $AB$ ;
- De la longueur du diamètre  $CD$ ;
- De l'épaisseur de la plaque;
- Du volume de la plaque.



# Example 3.3

## Déformations avec contraintes dans le plan

---

- Comme la plaque mince ( $t \ll l$ ) est soumise à une charge biaxiale, nous pouvons appliquer l'état de contraintes dans le plan
- En utilisant la matrice de souplesse:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$$

# Example 3.3

## Déformations avec contraintes dans le plan

- Une fois les déformations relatives connues, nous pouvons calculer:

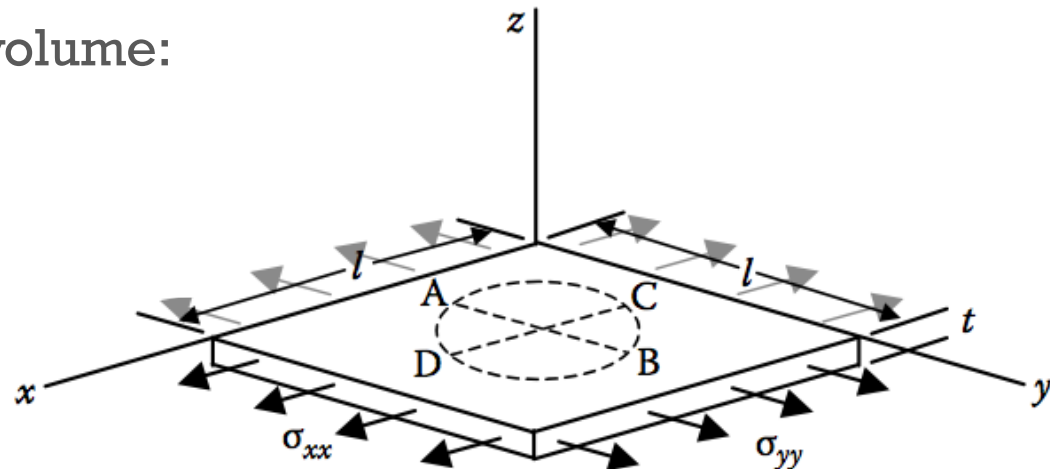
$$\Delta \overline{AB} = \varepsilon_{yy} \cdot \overline{AB} = d \cdot 0.56 \cdot 10^{-3} \qquad \Delta \overline{CD} = \varepsilon_{xx} \cdot \overline{CD} = d \cdot 0.21 \cdot 10^{-3}$$

- Puis pour la direction verticale (Contraintes dans le plan  $\sigma_z = 0$ ):

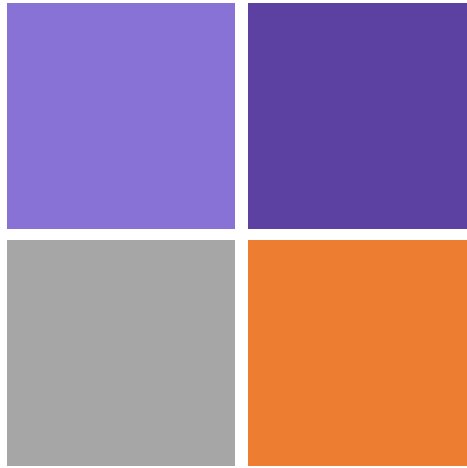
$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx})$$

- Et pour le changement de volume:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$



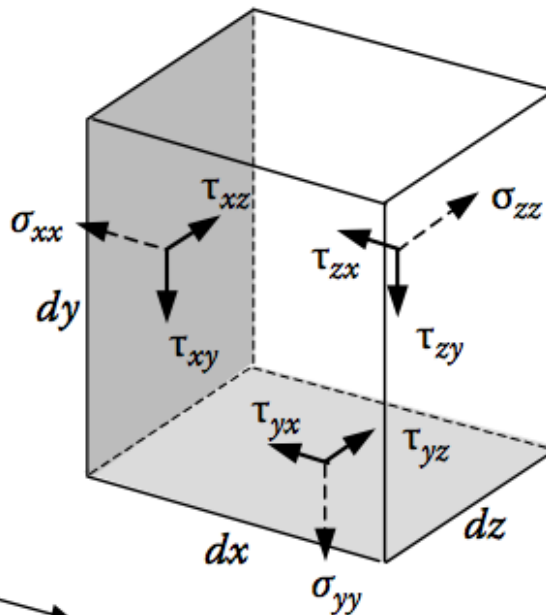
# Equations d'équilibre en 3D, 2D et 1D



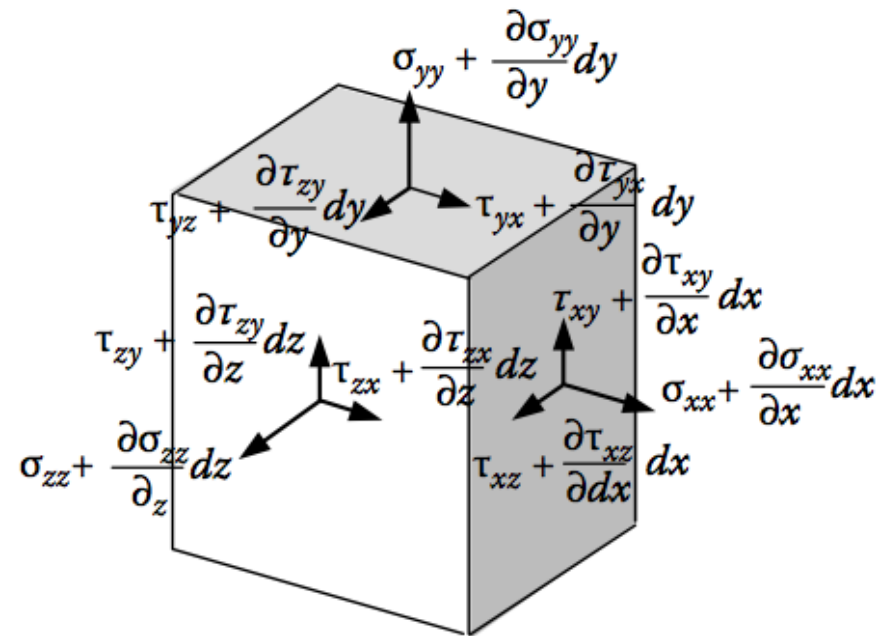
# Equilibre en 3D

## Equation microscopique d'équilibre

- On commence par définir les équations microscopiques d'équilibre.
- Rappel: 1<sup>er</sup> indice dénote le vecteur normal du plan, 2<sup>eme</sup> indice représente la direction du vecteur de force / contrainte.



Composantes des contraintes sur les faces de gauche, de dessous et arrières



Composantes des contraintes sur les faces droite, du dessus et avant

# Equilibre en 3D

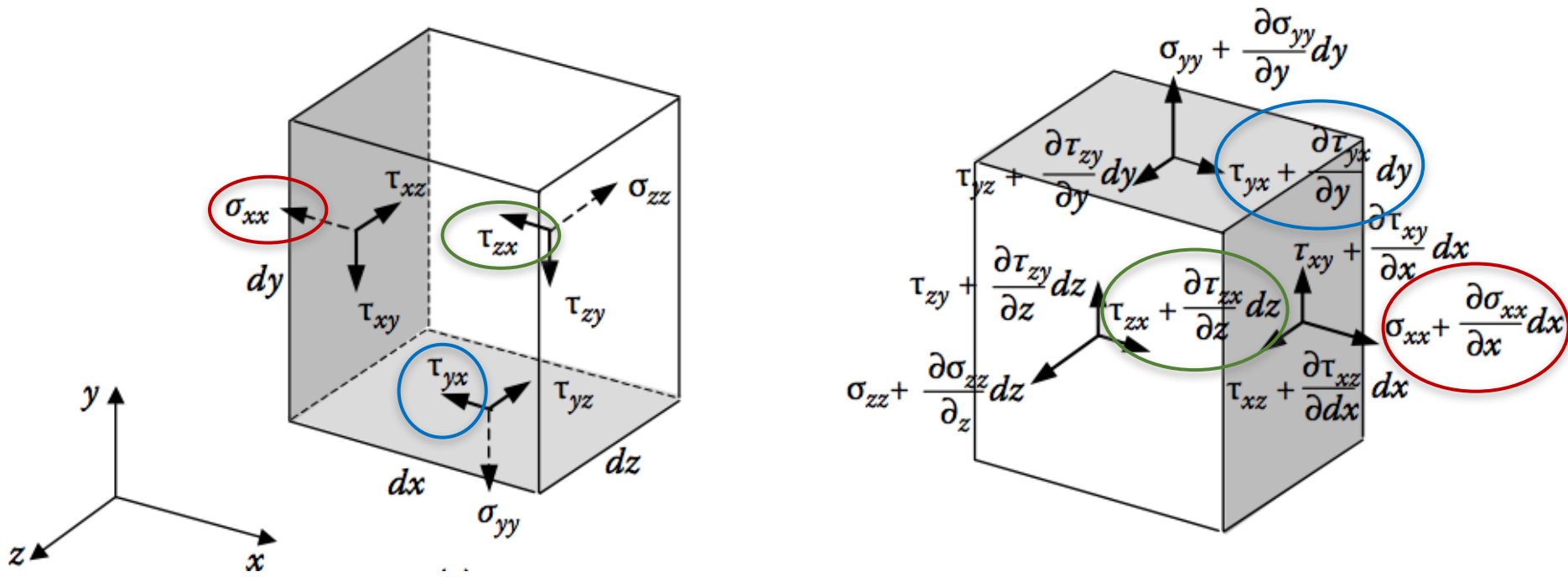
## Equation microscopique d'équilibre

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx - \sigma_{xx} \right) dy dz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) dx dz +$$

$$+ \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz - \tau_{xz} \right) dx dy + B_x dx dy dz = 0 \quad B_x : \text{Force en volume (N/m}^3\text{)}$$

(i.e. gravité)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + B_x = 0$$



# Equilibre en 3D

## Somme de toutes les forces

- Les forces dans la direction-x proviennent des contraintes sur CHACUNE des six faces
- Somme de tous les éléments qui agissent selon x, y et z:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x = 0$$

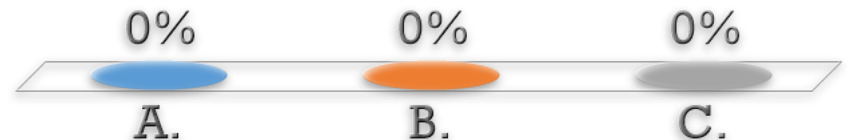
$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + B_z = 0$$

- Ce sont les 3 équations d'équilibre

# Après l'équilibre des forces, d'autres équilibres nécessaires ?

- A. Oui, nous devons considérer les Moments
- B. Non, les Forces suffisent
- C. Il n'y a pas de Moments résultants dans ce cas



# Equilibre en 3D

## Notation indicielle

- Ces 3 équations peuvent être réduite à une avec une notation indicielle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &:= \left( \right)_{,i} & \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &:= \left( \right)_{,ii} := \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} & \mathbf{y} &= \mathbf{x}_2 \\ & & \mathbf{z} &= \mathbf{x}_3 \\ \left( \right)_{i,i} &= \frac{\partial(\ )_i}{\partial x_i} := \sum_i \frac{\partial(\ )_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

- Nous pouvons écrire les 3 équations d'équilibre sous la forme:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

# Equations en 3D

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + B_z = 0$$

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

Équation d'équilibre

Équation constitutive

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

Équation cinématique

# Formuler des problèmes en 2D

## Equilibre en terme de déplacement – *Contraintes 2D*

- Et nous pouvons aussi exprimer l'équation d'équilibre dans l'état de contraintes dans le plan en terme de déplacement:

$$G\nabla^2 u + \frac{1+\nu}{1-\nu} G \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + B_x = 0$$

$$G\nabla^2 v + \frac{1+\nu}{1-\nu} G \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + B_y = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Si nous avons une barre avec une charge axiale seule  $\sigma_{xx}$  :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

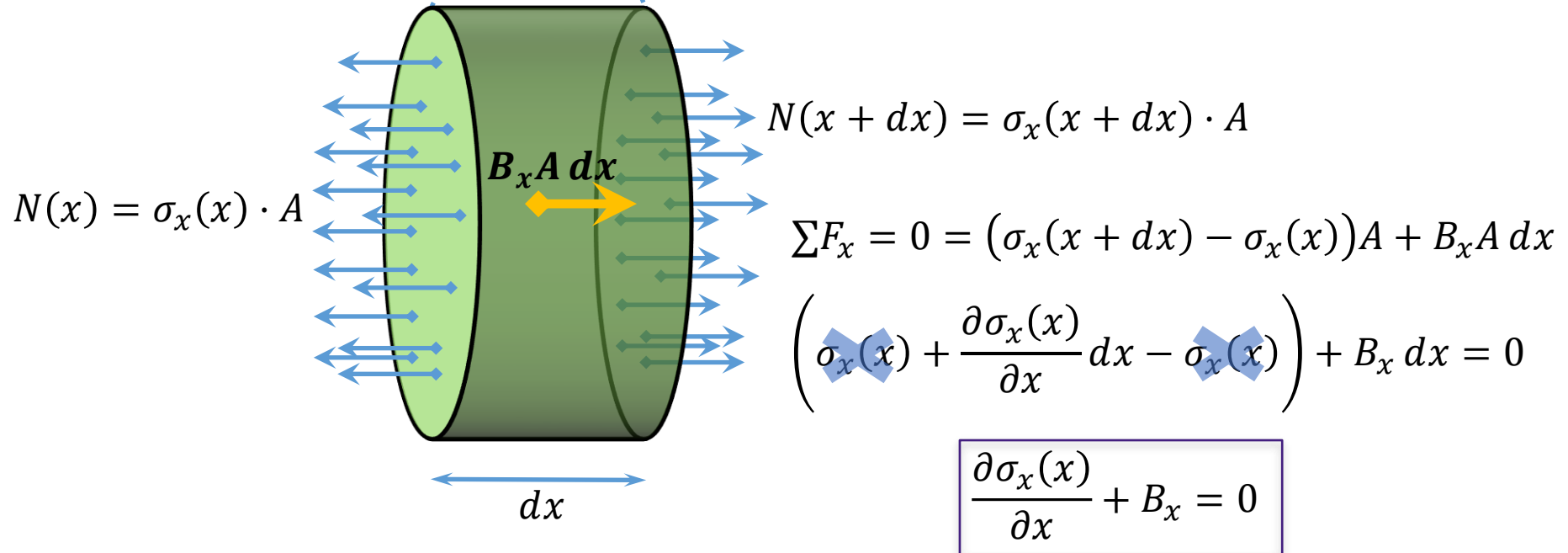
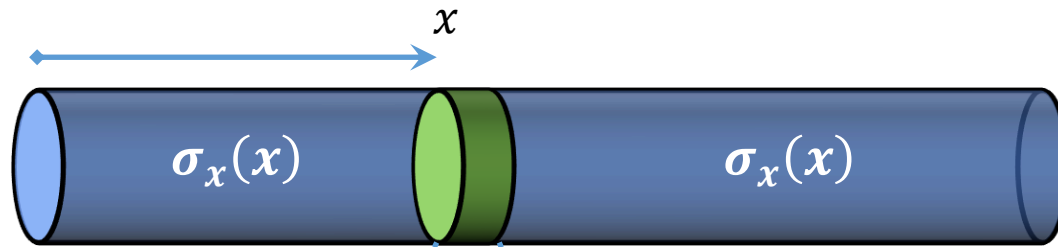
- Les équations se simplifient énormément:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + B_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + B_x = 0$$

# Equilibre en 1D

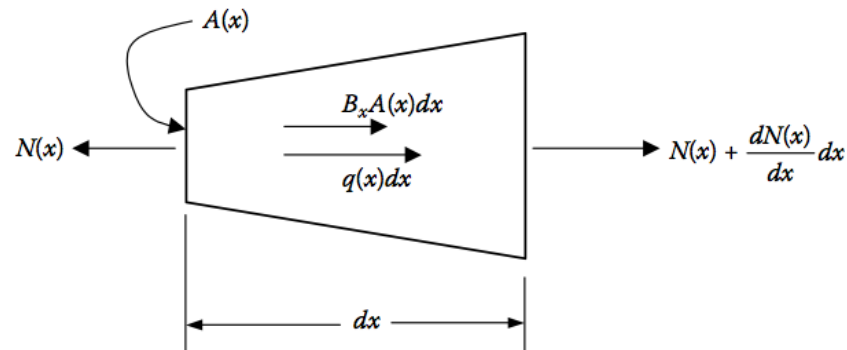
## Equation microscopique



# Analyse de l'équilibre microscopique

## En 1D

- Calcul de la contrainte à un point arbitraire d'une structure agissant sur un élément infinitésimal  $dV=A(x)dx$
- La force axiale *interne*  $N(x)$  équilibre les deux types de forces *externes* (charge axiale distribuée  $q(x)$ , et force axiale en volume  $B_x$ )



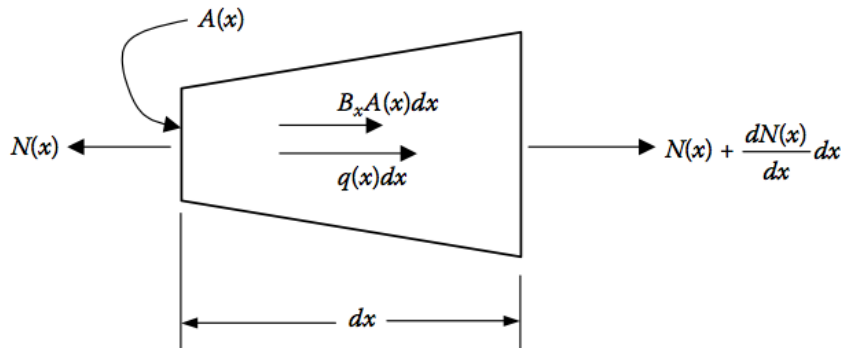
$q(x)$ : force axiale distribuée (N/m)

$B_x$  : force par volume (N/m<sup>3</sup>)

$$\left\{ N(x) + \frac{dN(x)}{dx} \cdot dx \right\} - N(x) + q(x)dx + B_x A(x)dx = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) + B_x A(x) = 0$$

# Equation d'équilibre en 1D

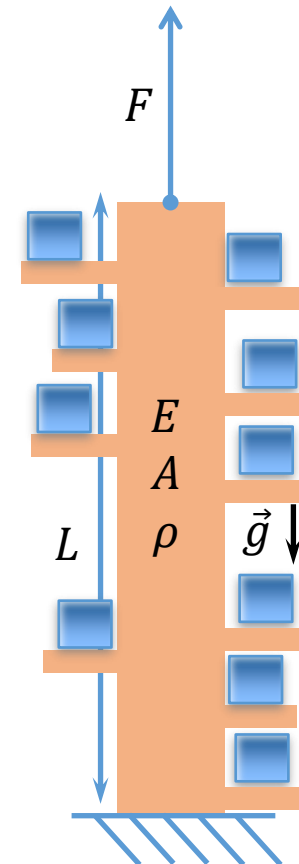


$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) + B_x A(x) = 0$$

$N(x)$ : Force interne

$B_x$  : Force en volume ( $\text{N/m}^3$ )  
(i.e. gravité, champ électromagnétique)

$q(x)$ \*: Charge axiale distribuée ( $\text{N/m}$ )

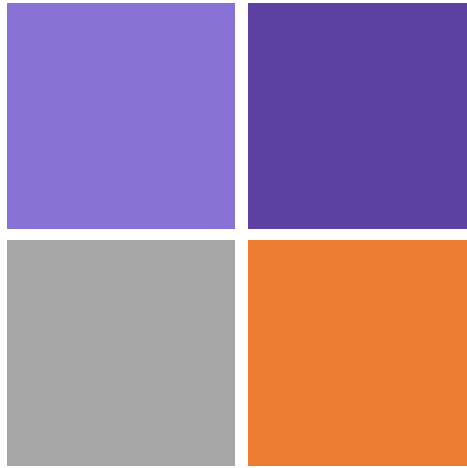


$B_x$  relié à la gravité ( $\rho$ )

$q(x)$  relié à des masses en extra

\* Pour la partie axiale du cours,  $q(x)=0$

# Déformation axiale



## Relier Contrainte & Déformation relative à la Déformation



- Que se passe-t-il lorsque l'on presse sur la gomme à effacer ?
- Pourquoi la réponse est-elle différente si l'on presse sur la gomme à plat ou sur son côté ?

- Si nous avons une barre avec une charge axiale:

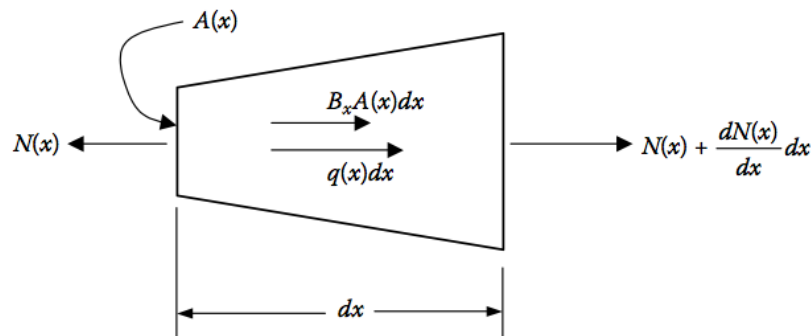
$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$



- Les équations se simplifient énormément:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + B_x = 0 \rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial x} + B_x A(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \end{aligned}$$



$$\epsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx}$$

$$u(x) - u(0) = \int_0^x \epsilon_{xx}(x') dx'$$

## 1. Définir la charge interne

- Définition de la contrainte

$$\sigma \equiv \frac{N}{A}$$

## 2. Relier la contrainte à la déformation relative

- Loi de Hooke reliant contrainte et déformation relative  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

## 3. Caractériser la déformation d'un matériau continu

- Définition cinématique de la déformation relative / déformation

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \longrightarrow \text{pour calculer } u(x)$$

## 4. Assurer que le corps est en équilibre

$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) + B_x A(x) = 0$$

# Déplacement dans une barre chargée axialement

- Nous utilisons les trois équations pour dériver l'extension générale dans la barre, **le déplacement  $u(x)$** :
- Ensemble avec l'équation d'équilibre et la loi de Hooke, nous exprimons l'équation d'équilibre en fonction de  **$u(x)$** :

$$\sigma = E\varepsilon = E \left( \frac{du(x)}{dx} \right)$$

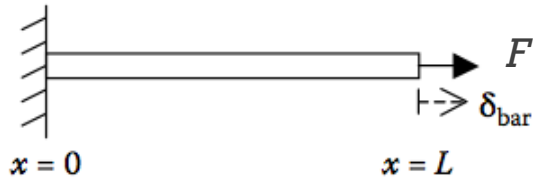
$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) + B_x A(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + B_x = 0}$$

Sans charge distribuée et avec E et A constants

$q(x)$ : charge distribuée = 0 et l'équation d'équilibre est divisée par A

# Déplacement dans une barre chargée axialement

- Le cas particulier d'une barre fixée à une extrémité et tirée avec une force  $F$ . Nous résolvons l'équation d'équilibre:



body force ( $B_x = 0$ ): 
$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0$$

- Conditions aux frontières:  $u(0)=0$  et  $\frac{du(L)}{dx} = \varepsilon(L) = \frac{\sigma(L)}{E} = \frac{N(L)}{AE}$

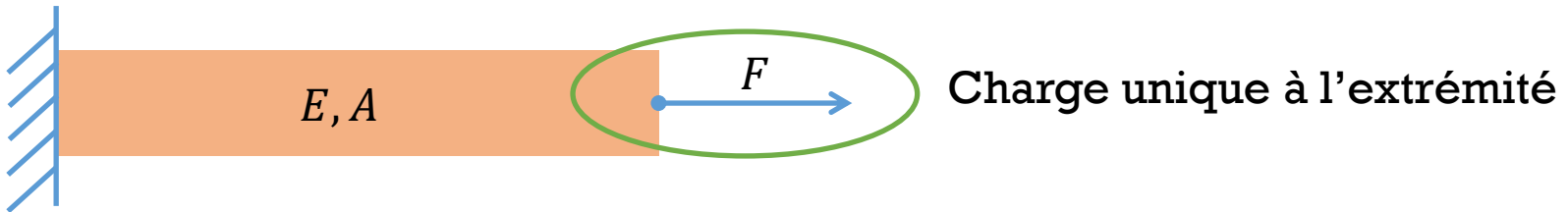
avec solution:

$$u(x) = C_1 x + C_2 \quad u(x) = u(0) + N(L) \cdot x / AE$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad u(x) = N(L) \cdot x / AE$$

- Nous trouvons l'expression de l'allongement total:

$$\delta = u(L) - u(0) = \frac{N(L)}{AE} \cdot (L - 0) = \frac{NL}{AE}$$



Pour **A** et **E constants**, nous pouvons écrire:

	Spring	Axially loaded bar
Hooke's Law	$F = k \cdot \Delta x$	$F = \frac{AE}{L} \delta$
Spring constant	$k$	$k = \frac{AE}{L}$

## ■ Rigidité $k$

$$k = \frac{AE}{L} \quad F = k \cdot \Delta$$

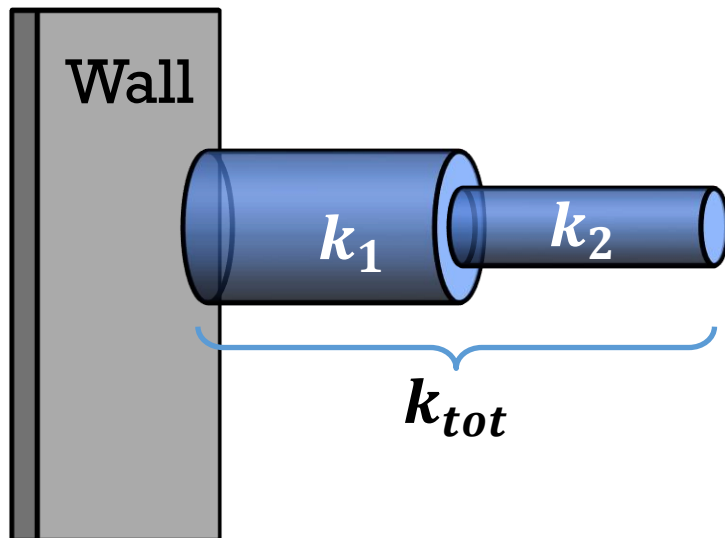
with  $\Delta = \delta$

## ■ Souplesse $f$

$$f = \frac{1}{k} = \frac{L}{AE} \quad \Delta = f \cdot F$$

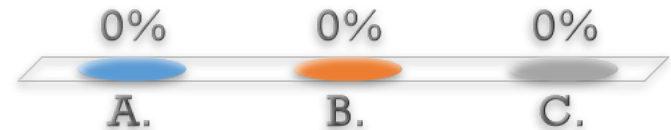
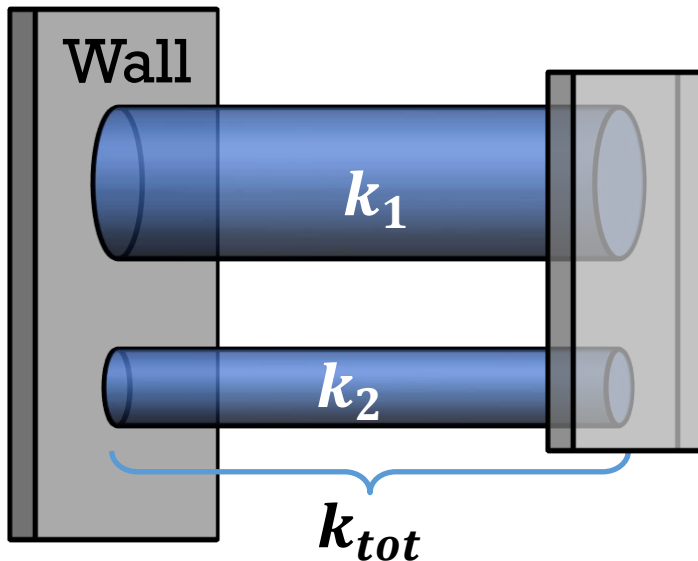
$k_{tot}$  pour cette structure ?

- A.  $k_{tot} = k_1 + k_2$   
B.  $k_{tot} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$   
C.  $k_{tot} = (k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}$



$k_{tot}$  pour cette structure ?

- A.  $k_{tot} = k_1 + k_2$   
B.  $k_{tot} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$   
C.  $k_{tot} = (k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}$



# Résumé Partie 2

## Déformation axiale

- Loi de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L}$$

- Déformation d'une barre chargée axialement avec une section uniforme A et E constant:

$$\delta = \frac{NL}{AE}$$

$$N = F = \frac{AE}{L} \delta$$

$\frac{AE}{L}$  : rigidité 'k'

- Déformation relative d'une barre chargée axialement avec des paramètres non constants:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{A(x) E(x)}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{A(x) E(x)} dx$$

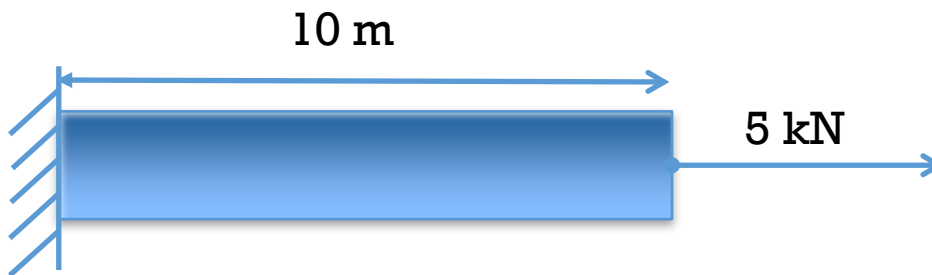
# Exemple 3.4

## Allongement d'une barre d'acier

Une barre circulaire de 10 m de longueur utilisée dans un mécanisme de contrôle doit transmettre une force en traction de 5 kN avec un allongement maximal de 3 mm et une contrainte n'excédant pas 150 MPa.

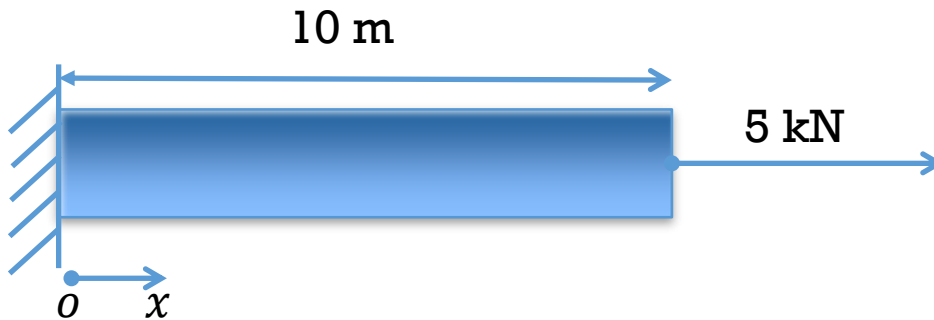
Quel doit être le rayon minimal de la barre ?

$$E = 200 \text{ GPa}$$



# Exemple 3.4

## Allongement d'une barre d'acier



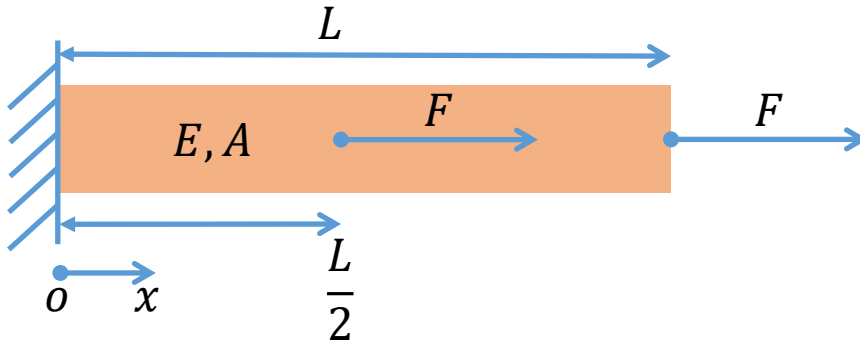
$$\sigma_{Max,permis} = 150 \text{ MPa}; \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} \rightarrow A_{min,\sigma} = \frac{5 \text{ kN}}{\sigma_{Max,permis}} = \frac{1}{3} 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\delta_{Max,permis} = 3 \text{ mm}; \delta = \frac{F}{k} = \frac{L}{AE} F \rightarrow A_{min,\delta} = \frac{5 \text{ kN} \cdot 10 \text{ m}}{200 \text{ GPa} \cdot \delta_{Max,permis}} = \frac{5}{6} 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{min,\delta} > A_{min,\sigma} \rightarrow r_{min} = \sqrt{\frac{A_{min,\delta}}{\pi}} = 0.52 \text{ cm}$$

# Exemple 3.5

Allongement avec 2 forces



Segments ne sont pas des Sections !!!

$$N = k\delta$$

Approche: Séparation de la structure en 2 segments

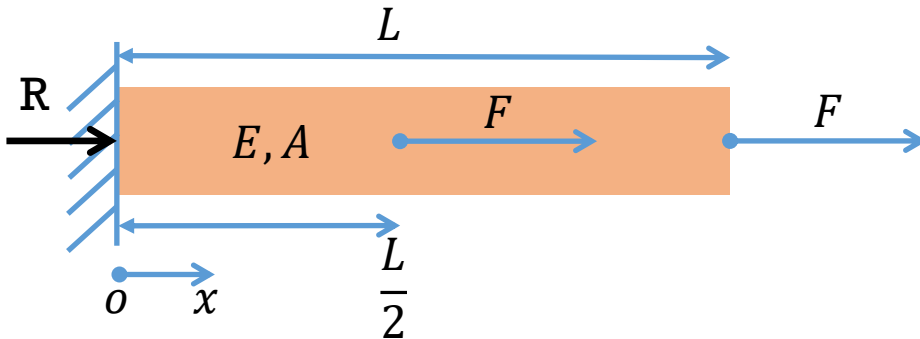
Calcul de l'allongement pour chacun des segments

Etape 1: **Méthode des sections** pour trouver les **forces internes «N»** dans chacun des segments

Etape 2: Calculer la **déformation axiale** en relation avec la constante de ressort de chacun des segments

# Exemple 3.5

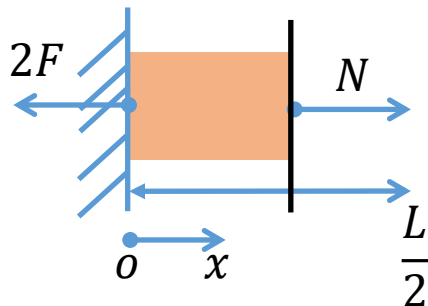
Allongement avec 2 forces



Réaction:  $R + 2F = 0$   
 $R = -2F$

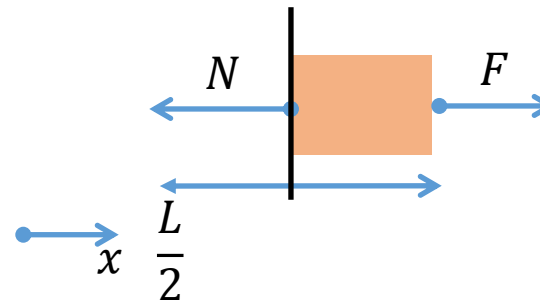
Etape 1: Méthode des sections pour trouver les forces internes dans chaque **segment**

Segment 1



$\mathbf{N = 2F}$

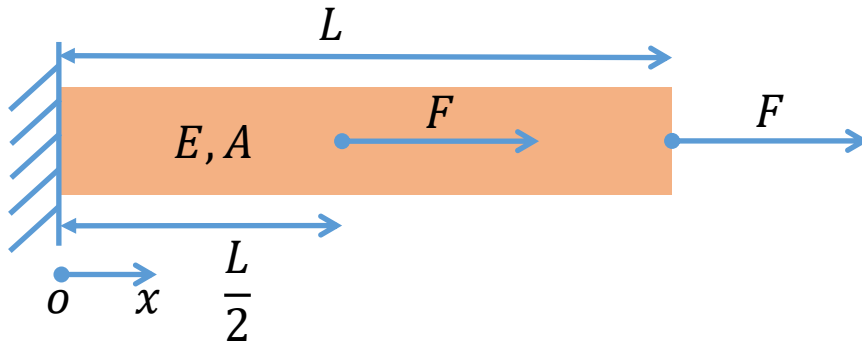
Segment 2



$\mathbf{N = F}$

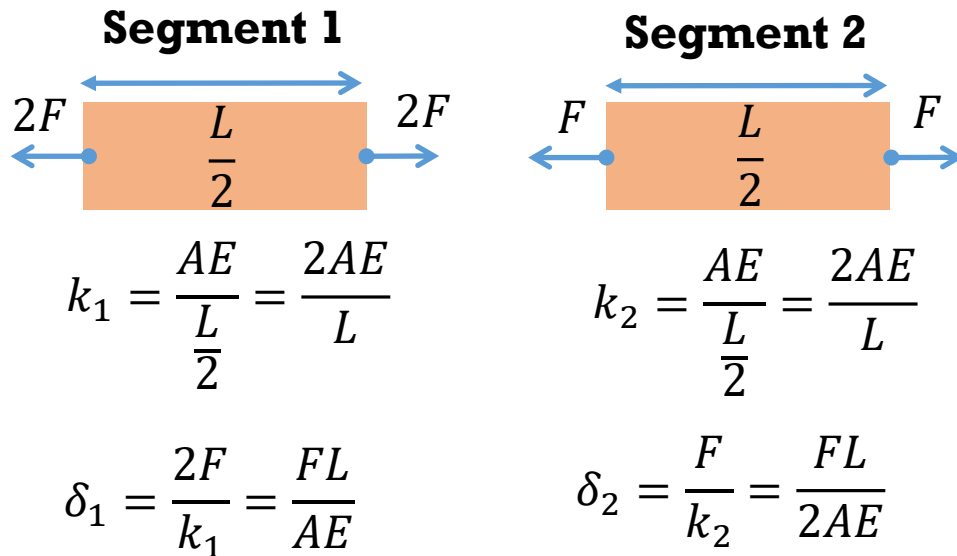
# Exemple 3.5

Allongement avec 2 forces



$$N = k\delta$$

Etape 2: Déformation axiale dans chaque segment



$$k_1 = \frac{AE}{\frac{L}{2}} = \frac{2AE}{L}$$

$$\delta_1 = \frac{2F}{k_1} = \frac{FL}{AE}$$

$$k_2 = \frac{AE}{\frac{L}{2}} = \frac{2AE}{L}$$

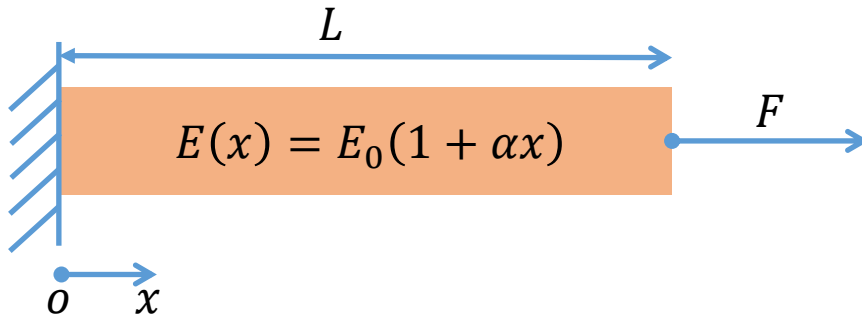
$$\delta_2 = \frac{F}{k_2} = \frac{FL}{2AE}$$

**Somme des déplacements pour le déplacement total**

$$\delta_{tot} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{3FL}{2AE}$$

# Exemple 3.6

Allongement d'une barre fait d'un alliage



$$N(x) = \text{constante} = F \rightarrow \sigma(x) = \frac{F}{A} = \text{constante}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma}{E(x)}; \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \rightarrow \delta = u(L) - u(0) = \int_0^L \varepsilon(x) dx$$

$$\delta = \int_0^L \frac{F}{AE(x)} dx = \frac{F}{A} \int_0^L \frac{dx}{E(x)} = \frac{F}{AE_0} \frac{\ln(1 + \alpha L)}{\alpha}$$

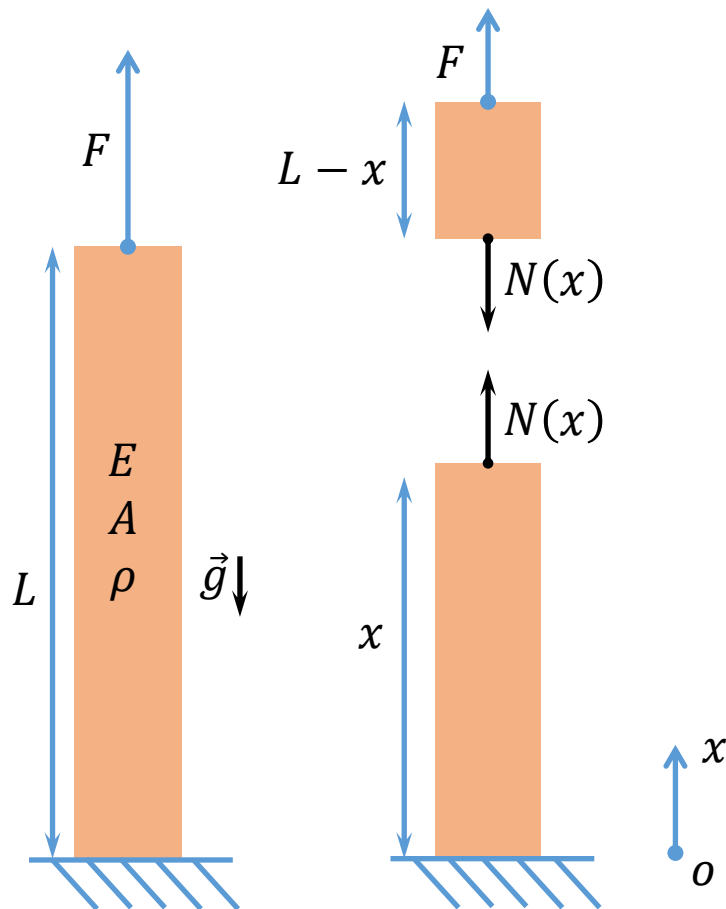
En analogie avec  $N = \underbrace{\frac{AE}{L}}_{\mathbf{k}} \cdot \delta \rightarrow k = AE_0 \frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha L)} \neq \frac{AE}{L}$

# Exemple 3.7

## Effet de la gravité

Solution en utilisant la méthode de section  
et l'équilibre eq.  $\Sigma F=0$

$\rho$ : densité en  $\text{kg/m}^3$



$N(x) \neq \text{constant!!!}$

$$F - N(x) - \rho Ag(L - x) = 0$$

$$N(x) = F - \rho Ag(L - x)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA}$$

$$\delta = u(L) - u(0) = \int_0^L \varepsilon(x) dx$$

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{AE} dx = \frac{1}{AE} \int_0^L N(x) dx$$

$$\delta = \frac{1}{AE} \left( FL - \rho Ag \frac{L^2}{2} \right)$$

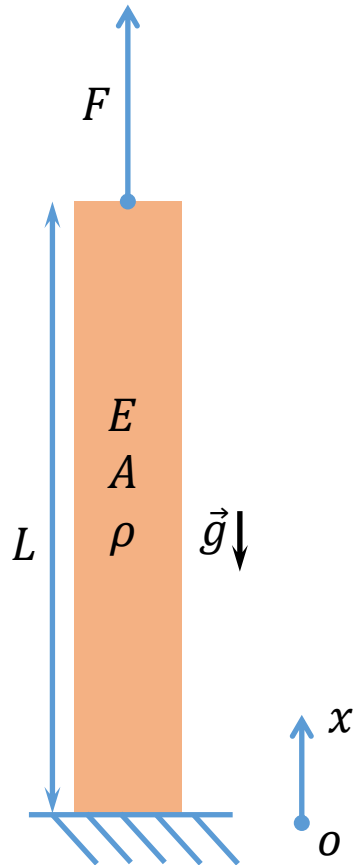
$k??$

# Exemple 3.7

## Effet de la gravité

Solution en utilisant la définition de l'équilibre en 1D

$\rho$ : densité en  $\text{kg}/\text{m}^3$



$$\frac{dN(x)}{dx} + BA(x) = 0$$

$$B = -\rho g$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = \rho g A \rightarrow N(L) - N(x) = \int_x^L \rho g A dx = \rho g A (L - x)$$

$$N(x) = N(L) - \rho A g (L - x) = F - \rho A g (L - x)$$

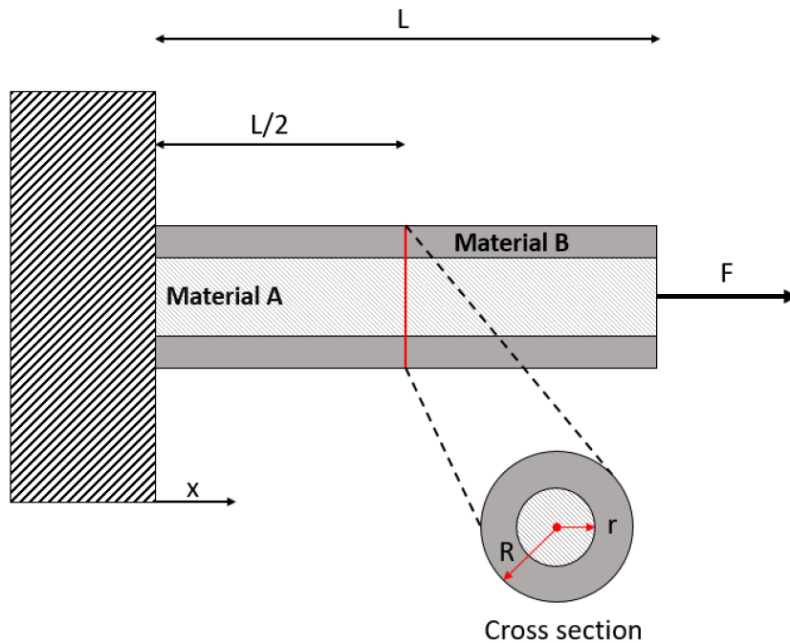
$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{AE} dx = \frac{1}{AE} \int_0^L N(x) dx$$

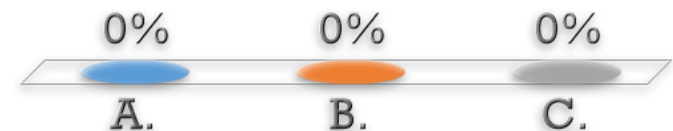
$$\delta = \frac{1}{AE} \left( FL - \rho A g \frac{L^2}{2} \right)$$

$k??$

# Force interne, $N$ , est – elle la même dans les matériaux A et B?



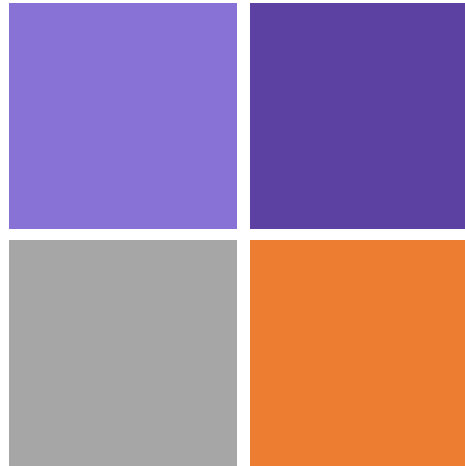
- A. Oui
- B. Non
- C. Ca dépend



Semaine 3

Partie III:

Effets thermiques



1. Effet thermique
2. Structures hyperstatiques

- Effet de la variation de température sur la contrainte et la déformation relative dans le matériau
- Comprendre ce qu'est un problème hyperstatique
- Résolution d'un système hyperstatique lorsqu'il y a une variation de température

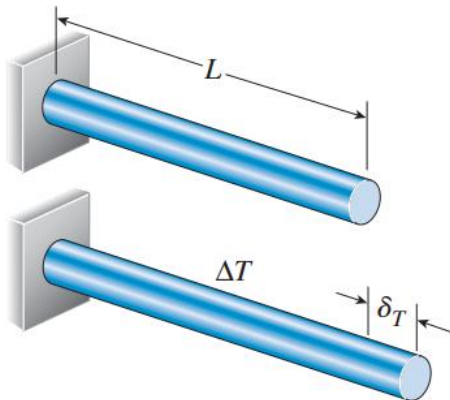
En général, les matériaux se dilatent avec une augmentation de la température (s'il n'y a pas de contraintes géométriques) et engendre une

## Déformation relative thermique:

$$\epsilon_T = \alpha(T - T_0) = \alpha\Delta T$$

$\alpha$  est le **coefficient de dilatation thermique (linéaire)**

Il a les dimensions (mm/mm)/°C or °C<sup>-1</sup>

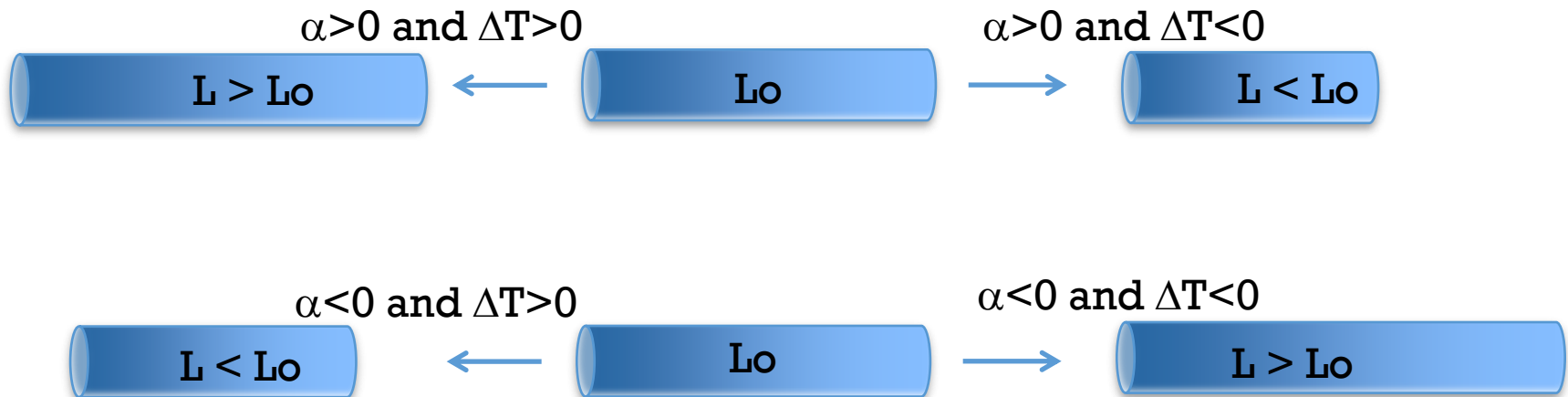


## Equation Température – Déplacement

$$\delta_T = \epsilon_T L = \alpha(\Delta T)L$$

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0) = \alpha\Delta T$$

$\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique (linéaire)



## Déformation relative thermique

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0) = \alpha\Delta T$$

Une force est appliquée



Puis une variation de température

$$\alpha > 0 \text{ et } \Delta T > 0$$

$$\varepsilon_{TOT} = \varepsilon_{mech, F} + \varepsilon_T \quad \text{avec } \varepsilon_{mech} = \sigma/E$$

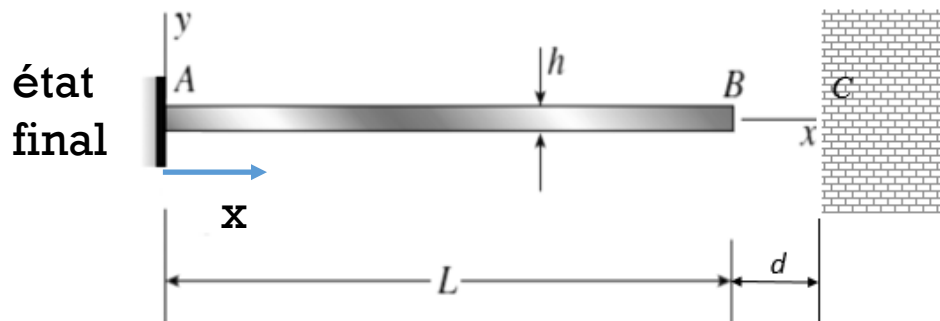
Déformations relatives thermiques peuvent être superposées aux déformations relatives normales

# Barre déformée par la température

Une barre à  $-6^{\circ}\text{C}$  touche un mur et la température est changée de façon à ce que la barre s'éloigne de 2 mm. **Quelle est la température de la barre une fois éloignée de " $d=2\text{ mm}$ " du mur ?**

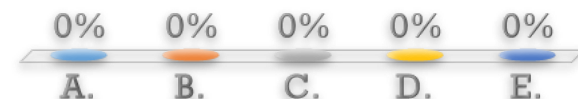
$$d = 2\text{ mm}, L = 98\text{ mm}, h = 10\text{ mm}$$

$$E = 23\text{ GPa}, \alpha = -16 \cdot 10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$



- A.  $-125\text{ }^{\circ}\text{C}$
- B.  $119^{\circ}\text{C}$
- C.  $125\text{ }^{\circ}\text{C}$
- D.  $-131\text{ }^{\circ}\text{C}$
- E. Aucune de ces réponses

$$\varepsilon_t = \alpha \cdot \Delta T$$



Si la structure est restreinte, sa déformation n'étant pas possible, la déformation relative thermique résultera en une **contrainte "thermique"**:

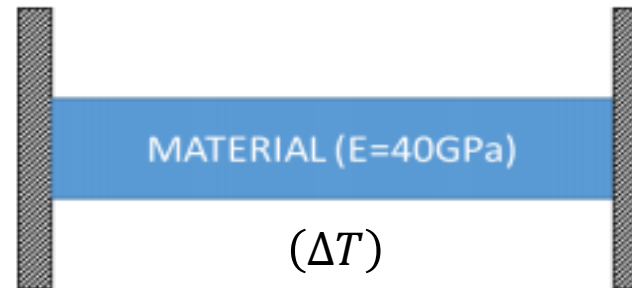
$$\sigma_{mech,T} = -E\alpha(\Delta T)$$

$$\epsilon_{TOT} = \epsilon_{mech,T} + \epsilon_T$$

$$0 = \epsilon_{mech,T} + \epsilon_T$$

$$\epsilon_{mech,T} = -\epsilon_T = -\alpha(\Delta T)$$

$$\epsilon_{mech,T} = \frac{\sigma_{mech,T}}{E} = -\alpha(\Delta T)$$

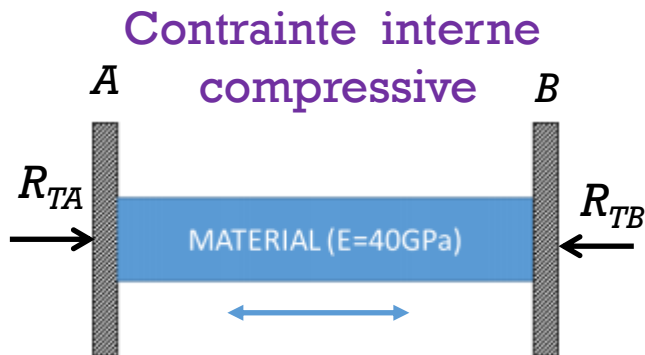


Le matériau veut se dilater ou se contracter mais les restrictions géométriques l'en empêchent: une force interne apparaît menant à une contrainte interne.

Contraintes "thermiques" peuvent être superposées aux contraintes normales

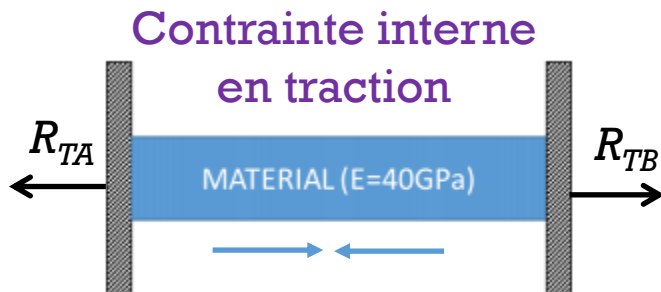
# Effets thermiques

Si la structure est restreinte, la déformation relative thermique résultera en une **contrainte "thermique"**:



$$\sigma_{mech,T} = -E\alpha(\Delta T)$$

delta T positif pour un  $\alpha$  positif: barre en compression

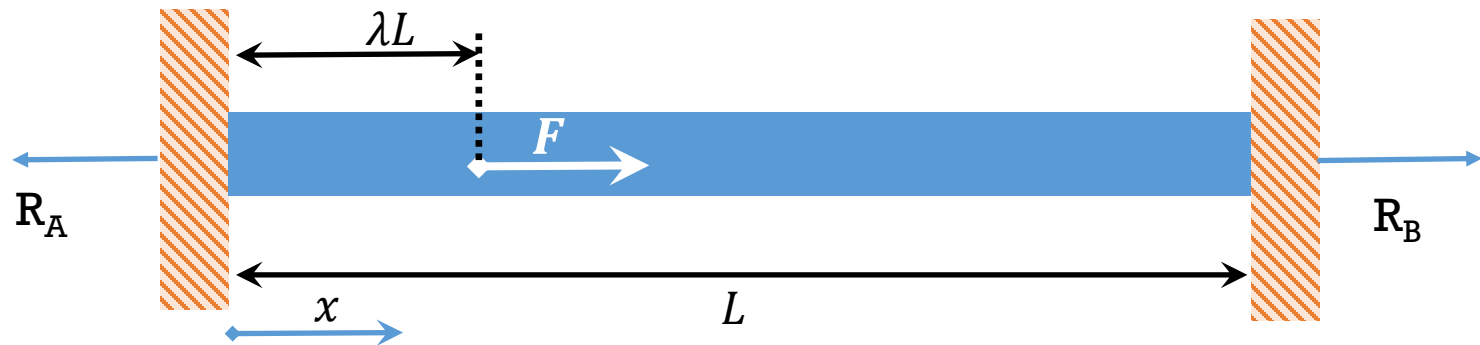


delta T négatif pour un  $\alpha$  positif: barre en traction

# Structure hyperstatique

## Problème indéterminé

- Un système pour lequel les équations d'équilibre sont insuffisantes pour déterminer les réactions (plus d'inconnus que d'équations)
- Certains des supports ou charges sont redondants pour maintenir l'équilibre



$$\sum F_x = 0 = R_B + F - R_A$$

- **Hyperstatique** avec une force redondante: 2 inconnues pour une équation
- Il faut donc une **équation supplémentaire** pour résoudre un tel système

\*Force redondante: Force en excès pour assurer l'équilibre

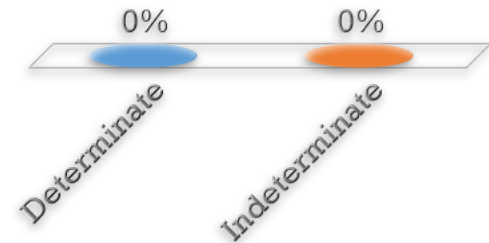
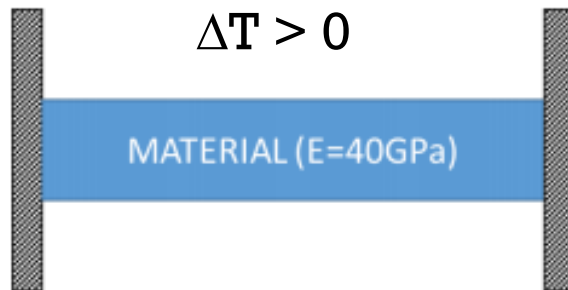
# Barre fixée à ses deux extrémités

## Effet d'une variation de température

- Une barre est fixée à ces deux extrémités à température ambiante. Elle est ensuite chauffée à une température plus élevée. ( $\alpha$  est positif)

Est-ce un système déterminé ou indéterminé / hyperstatique ?

- A. Déterminé
- B. Indéterminé



# Barre fixée à ses deux extrémités

## Effet d'une variation de température

- Une barre prismatique AB de longueur  $L$  est fixée à ses deux extrémités. Si la température de la barre est élevée de  $T$ ,

Donner:

- l'équation d'équilibre
- la réaction  $\mathbf{R}_A$  ?
- la contrainte  $\sigma_{\text{mech},T}$  développée dans la barre

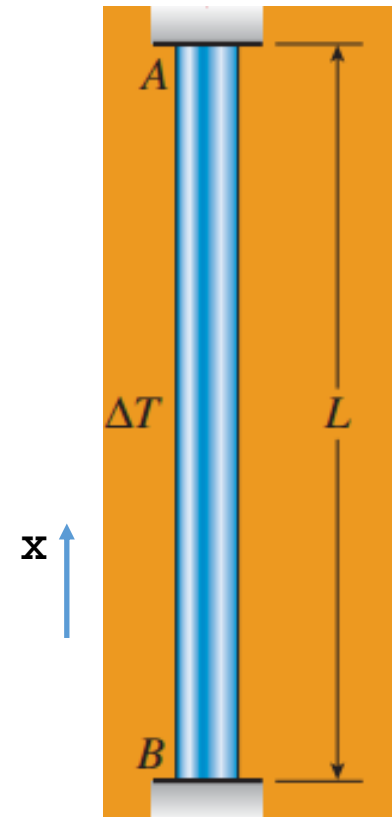
$$E = 100 \text{ GPa}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$\text{Diamètre} = 1 \text{ cm}$$

$$\alpha = 20 \times 10^{-6}$$

$$\Delta T = 200^\circ\text{C}$$



# Barre fixée à ses deux extrémités

## Effet d'une variation de température

- Une barre prismatique AB de longueur L est fixée à ses deux extrémités. Si la température de la barre est élevée de T,

Donner:

- l'équation d'équilibre
- la réaction  $R_A$  ?
- la contrainte  $\sigma_{\text{mech},T}$  développée dans la barre

$$E = 100 \text{ GPa}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$\text{Diamètre} = 1 \text{ cm}$$

$$\alpha = 20 \times 10^{-6}$$

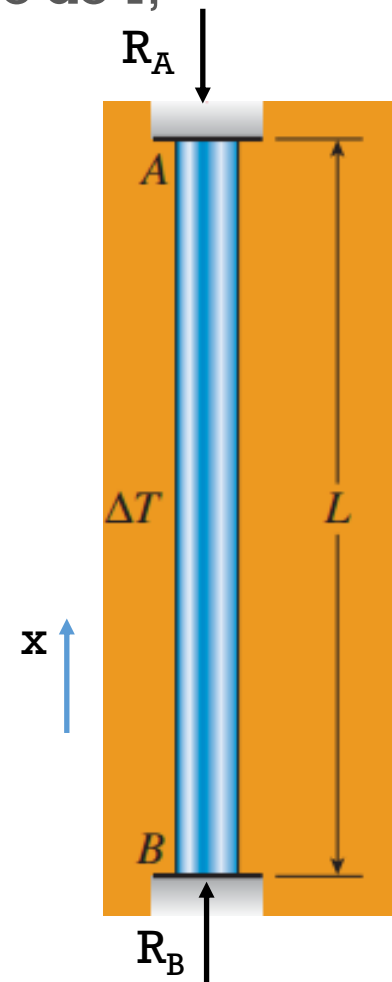
$$\Delta T = 200^\circ\text{C}$$

Equation d'équilibre

$$R_B - R_A = 0$$

Equation de compatibilité

$$\delta_{AB} = 0$$



# Barre fixée à ses deux extrémités

Effet d'une variation de température

Déplacement dû à  $\Delta T$

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

Déplacement dû à  $R_A$

$$\delta_{RA} = -f_{AB} R_A \quad f_{AB} = L/AE$$

$$\text{Compatibilité } \delta_T + \delta_{RA} = 0$$

$$\alpha \Delta T L - f_{AB} R_A = 0$$

$$R_A = \alpha \Delta T L / f_{AB}$$

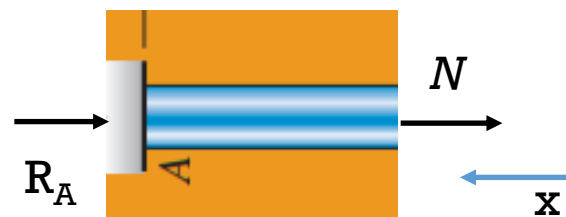
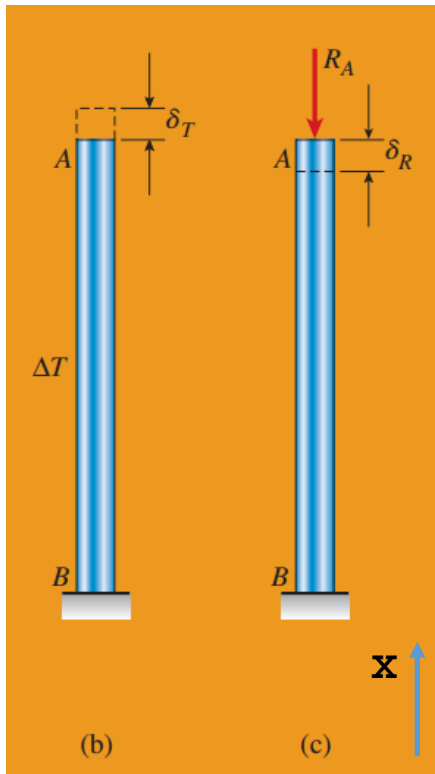
$$N = -R_A$$

$$\sigma = N/A$$

$$\sigma = -\alpha \Delta T L / A f_{AB}$$

$$\sigma = -\alpha \Delta T L AE / AL$$

$$\sigma = -\alpha \Delta T E$$



# Barre fixée à ses deux extrémités

Effet d'une variation de température

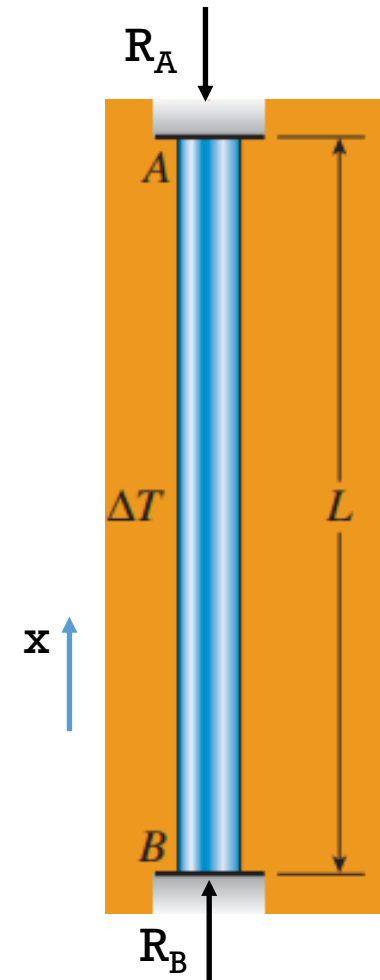
$$R_A = \alpha \Delta T L / f_{AB} \quad f_{AB} = L/AE$$

$$R_A = \alpha \Delta T E A$$

$$R_A = 31.4 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{mech},T} = -\alpha \Delta T E$$

$$\sigma_{\text{mech},T} = -400 \text{ MPa}$$



## Effets thermiques

---

- Déformation relative thermique:  $\epsilon_T := \alpha \Delta T$

- Déformation thermique:

$$\delta_T = \epsilon_T L = \alpha(\Delta T)L$$

- Si le matériau veut se dilater ou se contracter mais les restrictions géométriques l'en empêchent: une force interne apparaît menant à une contrainte interne «thermique»:

$$\sigma_{mech,T} = -E\alpha(\Delta T)$$

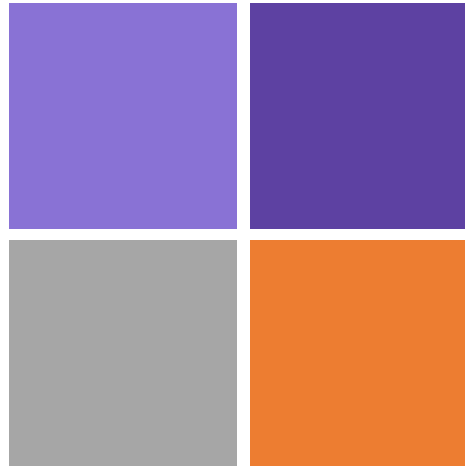
- Structure hyperstatique: Un système pour lequel les équations d'équilibre sont insuffisantes pour déterminer les réactions (plus d'inconnus que d'équations)

Il faut donc une équation supplémentaire pour résoudre un tel système: l'équation de compatibilité, fonction du système étudié

# Semaine 3

## Partie IV:

### Densité d'énergie



1. Énergie de déformation relative
2. Résumé

- Comprendre le concept d'énergie de déformation relative
- Calculer l'énergie de déformation relative emmagasinée dans un matériau élastique lorsque déformé

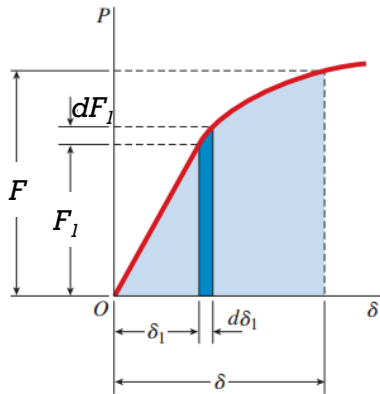
# Traitements des corps comme des ressorts: Energie de déformation relative

- Nous pouvons maintenant appliquer cette analogie à l'énergie emmagasinée par un ressort ou une barre

Pour A et E constants, nous pouvons écrire:

	<b>Ressort</b>	<b>Barre axiale sous charge</b>
Loi de Hooke	$F = k \cdot \Delta x$	$N = \frac{AE}{L} \cdot \delta$
Constante de ressort	$k$	$k = \frac{AE}{L}$

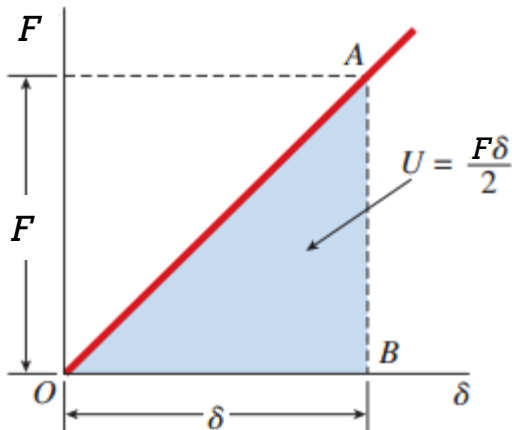
- L'Énergie de déformation relative est définie comme l'énergie absorbée par la barre lors de sa charge



Équation générale

$$U = W = \int_0^{\delta} F_1 d\delta_1 \quad (J)$$

- Loi de Hooke: La courbe de charge Force - Déplacement est linéaire



$$U = F \delta / 2 \quad \text{et} \quad \delta = FL/EA$$

$$U = \frac{F^2 L}{2EA}$$

$$U = \frac{EA \delta^2}{2L}$$

$$U = \frac{F^2}{2k}$$

$$U = \frac{k \delta^2}{2}$$

En Joules

# Energie de déformation relative en 1D

## Densité d'énergie de déformation relative

- De la loi de Hooke nous savons qu'un matériau solide réagit de manière similaire à un ressort. L'énergie emmagasinée par un ressort est:

$$U_{spring} = \int_0^x F_s dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

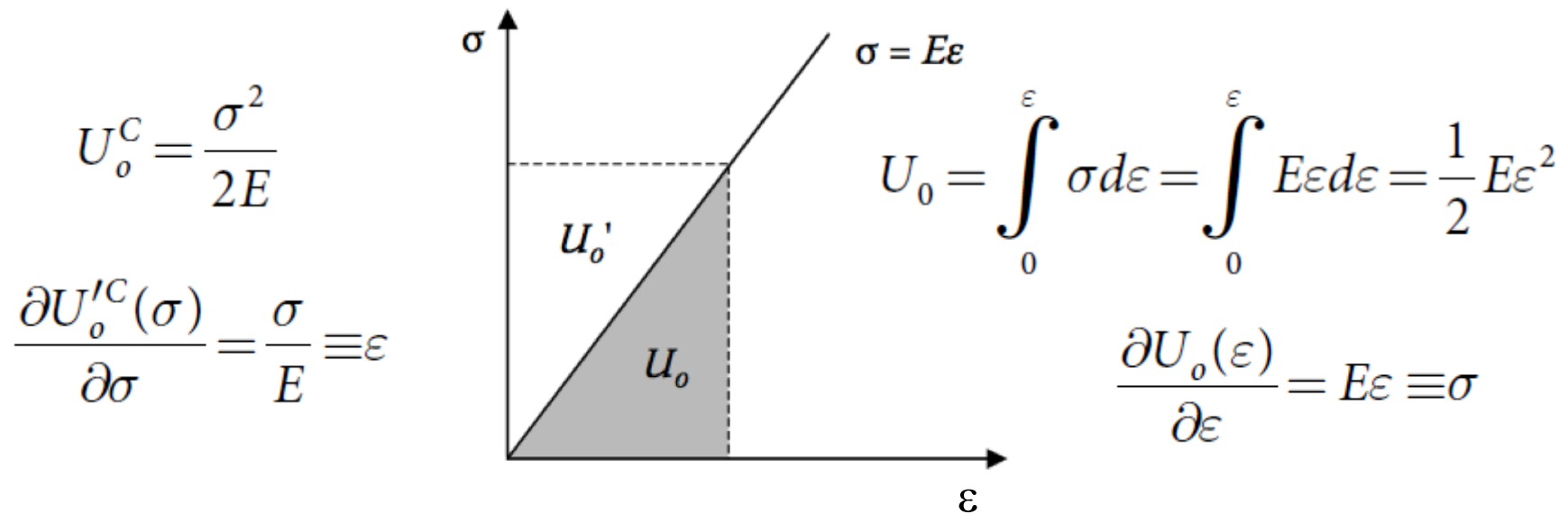
- Par analogie, l'Energie de déformation relative dans un solide élastique (**l'énergie de déformation relative par unité de volume, la densité d'énergie de déformation relative**) est:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 \quad (\mathbf{J/m^3})$$

# Energie de déformation relative en 1D

## Aire de la courbe Contrainte – Déformation relative

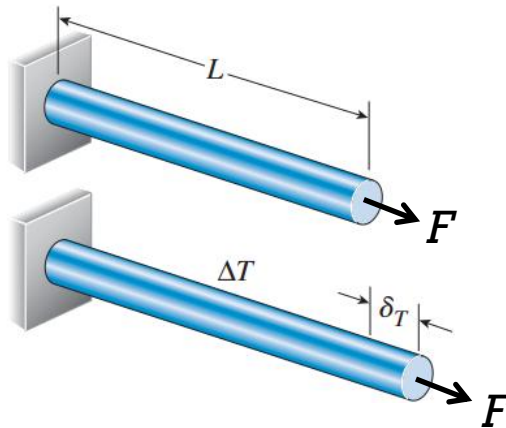
- Aire sous la courbe Contrainte-Déformation relative:  
*Densité d'énergie de déformation relative ( $U_o$ : J/m<sup>3</sup>)*
- Aire “sur” la courbe Contrainte-Déformation relative :  
*Densité d'énergie complémentaire ( $U_o'$ : J/m<sup>3</sup>)*



# Energie de déformation relative en 1D

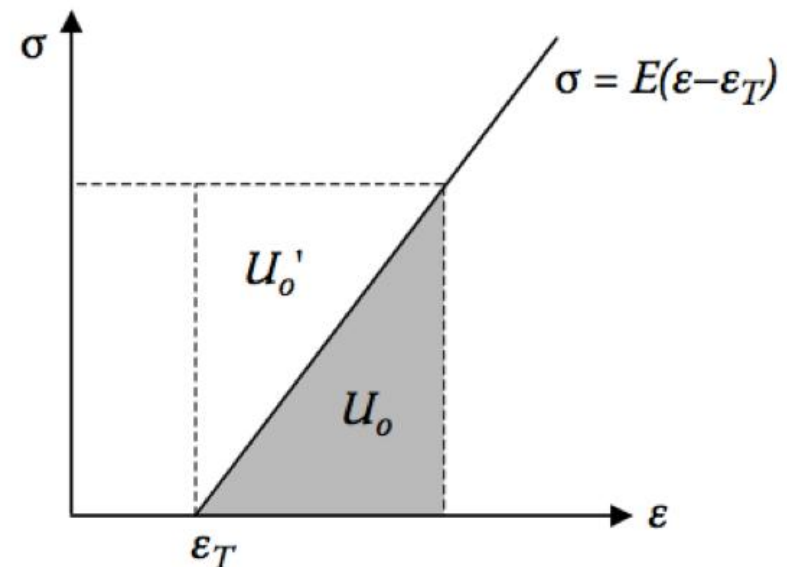
## Energie de déformation relative et température

- Déformation relative thermique crée un décalage dans la courbe  $\sigma$  vs.  $\varepsilon$ 
  - Energie de déformation relative due à une charge externe  $F$
  - Barre libre: Déformation relative thermique, pas de contrainte (aucune force interne ne s'oppose à sa dilatation)
  - **Barre libre: une variation de température ne change pas son énergie**



$U_0$  / Aire restent les mêmes que sans la composante thermique

$U_0$  est la densité d'énergie de déformation relative  $J/m^3$



# Energie de déformation relative en 1D

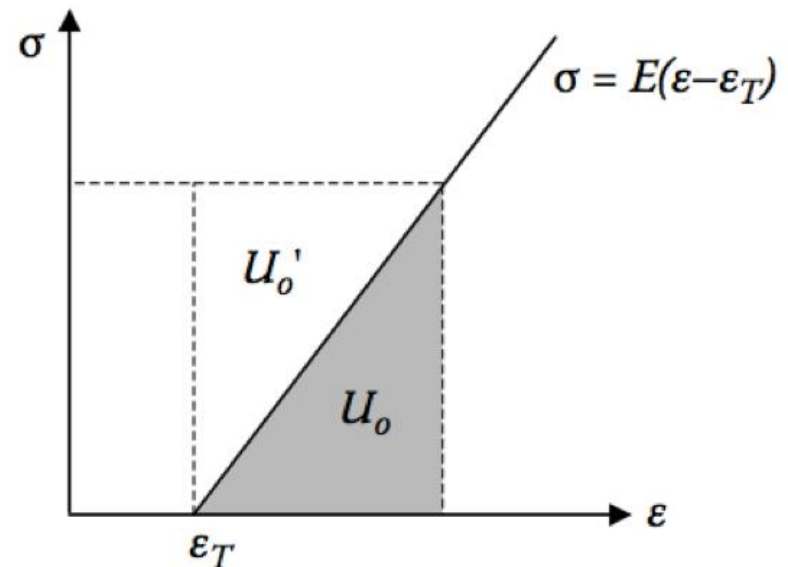
## Energie de déformation relative et température

- Déformation relative thermique crée un décalage dans la courbe  $\sigma$  vs.  $\epsilon$

$$U_0 = \int_{\epsilon_T}^{\epsilon} \sigma d\epsilon = \int_{\epsilon_T}^{\epsilon} E(\epsilon - \epsilon_T) d\epsilon = \frac{1}{2} E(\epsilon - \epsilon_T)^2$$

$U_0$  / Aire restent les mêmes que sans la composante thermique

**$U_0$  est la densité d'énergie de déformation relative  $J/m^3$**



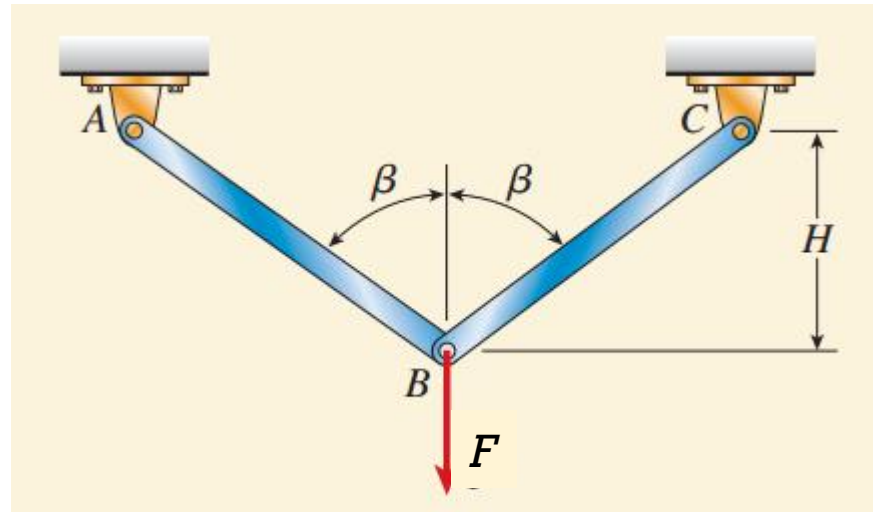
# Example 3.8

Déformation à partir de l'énergie de déformation relative

Déterminer la déformation verticale  $\delta_B$  du joint B de cette charpente.

Charge  $F$  appliquée au joint B.

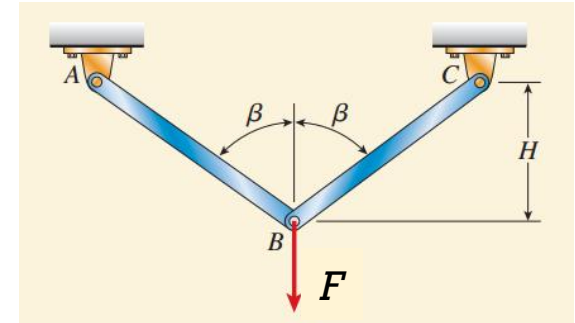
Note: Barres avec la même rigidité axiale.



# Example 3.8

Déformation à partir de l'énergie de déformation relative

Déplacement du point B est déterminé en utilisant l'équilibre et l'énergie de déformation relative



$$U = W \quad W = \frac{F\delta}{2} \quad U = \frac{F^2 L}{2EA}$$

Force axiale sur une barre:  $F_{axiale} = \frac{F}{2 \cos \beta}$       Longueur de la barre:  $L = \frac{H}{\cos \beta}$

Pour 2 barres:  $U = \frac{2F^2 L}{2EA} = \frac{1}{EA} \times \frac{F^2}{4 \cos^2 \beta} \times \frac{H}{\cos \beta} = \frac{F^2 H}{4 EA \cos^3 \beta}$

$$U = W \quad \frac{F\delta}{2} = \frac{F^2 H}{4 EA \cos^3 \beta}$$

$$\delta = \frac{FH}{2EA \cos^3 \beta}$$

# Densité d'énergie de déformation relative: $U_0$ ?

On applique une force  $F$  à l'extrémité libre. La température initiale est de  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , puis elle est augmentée jusqu'à atteindre  $T_f = 120^\circ\text{C}$ . Après chauffage et avec  $F$  maintenue, l'élongation à l'extrémité libre de la barre est de 0 (i.e.  $\delta(L) = 0$ ). **Calculer  $U_0$ .**

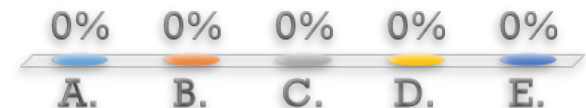
$$E = 200 \text{ GPa} \quad \alpha = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$L = 0.5 \text{ m} \quad t = 0.01 \text{ m} \quad b = 0.03 \text{ m}$$



$$U_0 = \frac{1}{2} E (\varepsilon_{TOT} - \varepsilon_T)^2$$

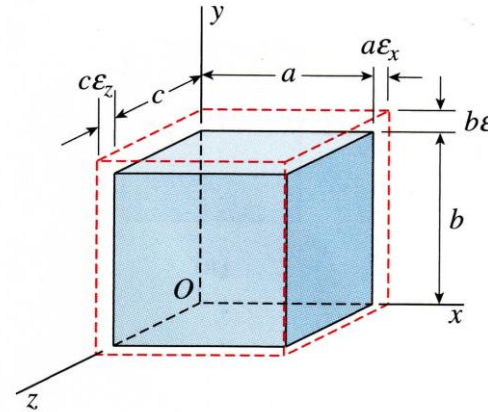
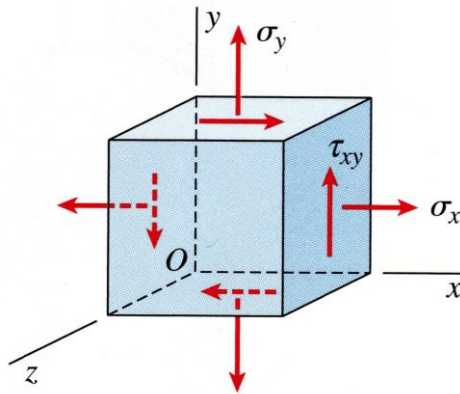
- A. 100 kPa
- B. 200 kJ
- C. 0
- D. 100 kJ
- E. 200 kPa



# Energie de déformation relative 2D

## Contraintes dans le plan

- Regardons le cas de Contraintes dans le plan:



$$W = \int_{\delta_i} F_i d\delta_i \quad \text{if linear} \equiv \text{elastic} \quad \frac{1}{2} F_i \delta_i$$

- En calculant le travail des composantes individuelles des contraintes normales et de cisaillement, la densité d'énergie de déformation relative est:

$$u_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

## Contraintes dans le plan

- En reformulant selon les composants de contrainte ou de déformation relative: la densité d'énergie de déformation relative:

$$u_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

$$u_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) + \frac{G\gamma_{xy}^2}{2}$$

- Important: Ces formules ont été dérivées que pour l'état de contraintes dans le plan!

# Energie de déformation relative en 3D

## Formule générale en 3D

---

- Formule complète en 3D pour la Densité d'énergie de déformation relative:

$$u_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$

# Quel cas est le plus efficace énergétiquement ?

- A. Contraintes dans le plan
- B. Déformations relatives dans le plan

$$u_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$



# Densité d'énergie de déformation relative: $U_0$ ?

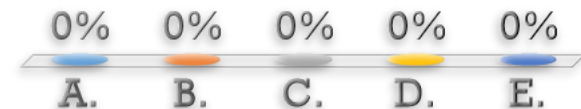
Soit une plaque (un cas de déformation relative dans le plan selon l'axe z) chargée selon les matrices de contrainte et de déformation relative suivantes.

**Calculer  $U_0$ .**

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{MPa} \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

- A. 650 J/m<sup>3</sup>
- B. 800 J/m<sup>3</sup>
- C. 1400 J/m<sup>3</sup>
- D. 700 J/m<sup>3</sup>
- E. 1300 J/m<sup>3</sup>



# Résumé Partie 4

## Densité d'énergie de déformation relative

- Energie de déformation relative en 1D (J)

$$U = \frac{F^2 L}{2EA}$$

$$U = \frac{EA\delta^2}{2L}$$

- Densité d'énergie de déformation relative (J/m<sup>3</sup>)

$$U_0 = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2, \quad U_0 = \int_{\varepsilon_T}^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_{\varepsilon_T}^\varepsilon E(\varepsilon - \varepsilon_T) d\varepsilon = \frac{1}{2} E(\varepsilon - \varepsilon_T)^2$$

- Densité d'énergie de déformation relative en 3D (J/m<sup>3</sup>)

$$u_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$